

Etude d'un signal

Par lecture graphique : $u_m = 6V$

$$T = 0,100 \text{ s donc } \omega = \frac{2\pi}{T} = 62,8 \text{ rad.s}^{-1}$$

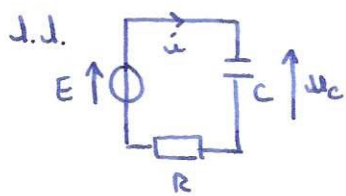
$$u_m(t) = u_m \cos(\omega t + \varphi) \text{ donc } u_m(0) = u_m \cos \varphi \text{ donc } \cos \varphi = \frac{u_m(0)}{u_m}$$

$$\text{on en déduit : } \varphi = \pm \arccos \frac{u_m(0)}{u_m} \text{ or } \frac{du_m}{dt} = -\omega u_m \sin(\omega t + \varphi) \text{ donc}$$

$$\left. \frac{du_m}{dt} \right|_0 = -\omega u_m \sin \varphi < 0 \text{ donc } \sin \varphi > 0 \text{ donc } \boxed{\varphi = + \arccos \frac{u_m(0)}{u_m}}$$

$$\textcircled{AN} \varphi = + 0,84$$

Régime transitoire d'un circuit RC



Loi des mailles: $E = u_R + u_C = u_C + Ri$ or $i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_C}{dt}$

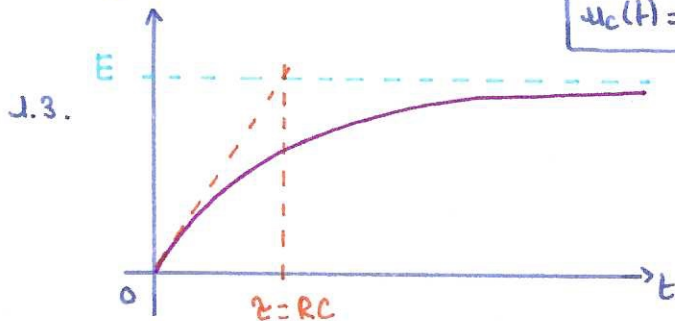
$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} u_C = \frac{E}{RC}$$

1.2.

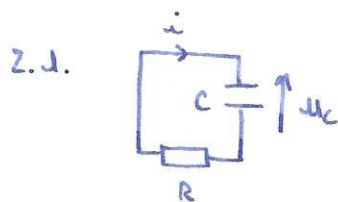
$$\begin{cases} u_C = E \\ u_C = A e^{-t/RC} \end{cases}$$

$$u_C(t) = A e^{-t/RC} + E \text{ or } u_C(t=0) = A + E = 0$$

$$u_C(t) = E(1 - e^{-t/RC})$$



1.4. à $t=0$, $u_C(t=0)=0$ donc $E = Ri(t=0)$ donc $i(t=0) = \frac{E}{R}$ donc $\left(\frac{di_C}{dt}\right)_{t=0} = \frac{E}{RC}$



Loi des mailles: $u_C + Ri = 0$ donc :

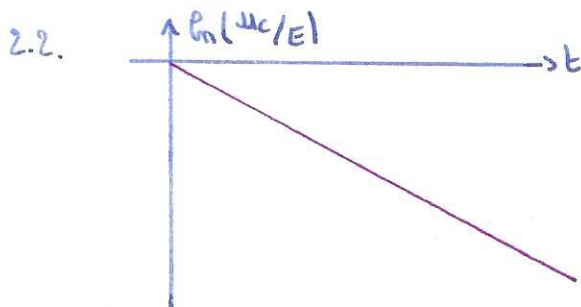
$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} u_C = 0$$

dont la solution est : $u_C(t) = A e^{-t/RC}$ or $u_C(t=0) = A = E$

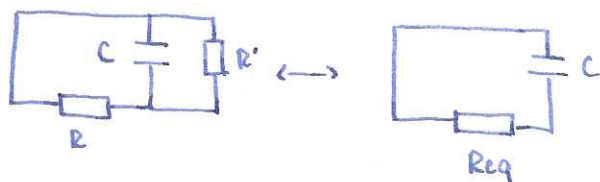
$$u_C(t) = E e^{-t/RC}$$

donc $\ln \frac{u_C}{E} = -\frac{1}{RC} t$ donc la courbe $\ln \frac{u_C}{E} = f(t)$ est une droite passant par l'origine de

pende $-\frac{1}{RC} = -\frac{1}{\tau}$



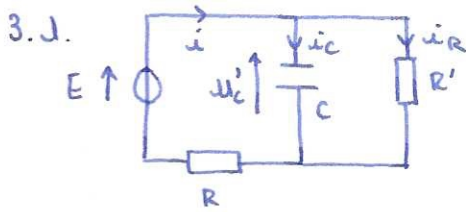
pende : $-2,0 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ donc $RC = 50 \text{ s}$
en prenant en compte le voltmètre de résistance R'



or $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{R' + R}{RR'}$ donc $R_{eq} = \frac{RR'}{R' + R}$ or $R_{eq} C = 50 \text{ s}$

$$R' = \frac{R\tau}{C - \tau}$$

(AN) $R' = 10 \text{ k}\Omega$



loi des mailles:
$$\begin{cases} E = Ri + u_c' \\ u_c' = R'i_R \end{cases}$$

loi des nœuds:
$$i = i_c + i_R = C \frac{du_c'}{dt} + \frac{u_c'}{R'}$$

donc
$$E = \frac{R}{R'} u_c' + u_c' + RC \frac{du_c'}{dt}$$
 soit:
$$\boxed{\frac{du_c'}{dt} + \frac{R+R'}{RR'C} u_c' = \frac{1}{RC} E}$$

3.2.
$$\begin{cases} u_c' = \frac{R'E}{R+R'} \\ u_c' = A e^{-t/\tau'} \text{ avec } \tau' = \frac{RR'C}{R+R'} \end{cases}$$

$$u_c'(t) = A e^{-t/\tau'} + \frac{R'E}{R+R'} \text{ or } u_c'(t=0) = A + \frac{R'E}{R+R'} = 0$$

$$\boxed{u_c'(t) = \frac{R'E}{R+R'} (1 - e^{-t/\tau'})}$$

On constate que la présence du voltmètre modifie la valeur finale de u_c' : $\lim_{t \rightarrow \infty} u_c'(t) = \frac{E}{2}$

ainsi que la constante de temps $\tau' = \frac{\tau}{2}$

4.1. Continuité de la tension aux bornes du condensateur: $u_c(t=0^+) = 0$ donc la loi des mailles donne:

$$V_c(t=0^+) = -R_1 i(t=0^+) \text{ soit } \boxed{i(t=0^+) = \frac{-V_{ref}}{R_1}}$$

4.2. A la date $t = \Delta t^-$, le régime permanent est atteint, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert donc la loi des mailles donne:

$$V_c(t = \Delta t) = -(R_1 + R_2) i(t = \Delta t) \text{ soit } \boxed{i(t = \Delta t) = \frac{-V_{ref}}{R_1 + R_2}}$$

4.3.a. $V_c(t) = u(t) - R_1 i(t)$ avec $i(t) = \frac{-u(t)}{R_2} - C \frac{du(t)}{dt}$ (loi des nœuds)

$$V_c(t) = u(t) \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) + R_1 C \frac{du(t)}{dt}$$

$$\boxed{\frac{du(t)}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} u(t) = \frac{1}{R_1 C} V_c(t)}$$

on posera $\tau = \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2}$

4.3.b. sur $[0, \Delta t]$, $V_c(t) = V_{ref}$ donc $u(t) = A e^{-t/\tau} + \frac{R_2 V_{ref}}{R_1 + R_2}$

or $u(t=0^+) = A + \frac{R_2 V_{ref}}{R_1 + R_2} = 0$

$$u(t) = \frac{R_2 V_{ref}}{R_1 + R_2} (1 - e^{-t/\tau})$$

si on suppose $\tau \ll \Delta t$ alors $e^{-\Delta t/\tau} \approx 0$ donc :

$$u(t) \approx \frac{R_2 V_{ref}}{R_1 + R_2}$$

4.4. $i(t) = \frac{u(t) - v_e(t)}{R_1} = \left[\frac{R_2 V_{ref}}{R_1 + R_2} (1 - e^{-t/\tau}) - V_{ref} \right] \times \frac{1}{R_1}$ sur l'intervalle $[0, \Delta t]$

$$i(t) = \frac{-V_{ref}}{R_1 + R_2} - \frac{R_2 V_{ref}}{R_1 (R_1 + R_2)} e^{-t/\tau}$$

donc $i(t=0^+) = \frac{-V_{ref}}{R_1 + R_2}$ et $i(t=\Delta t^-) = \frac{-V_{ref}}{R_1 + R_2}$ (cf Q4.1 et Q4.2)

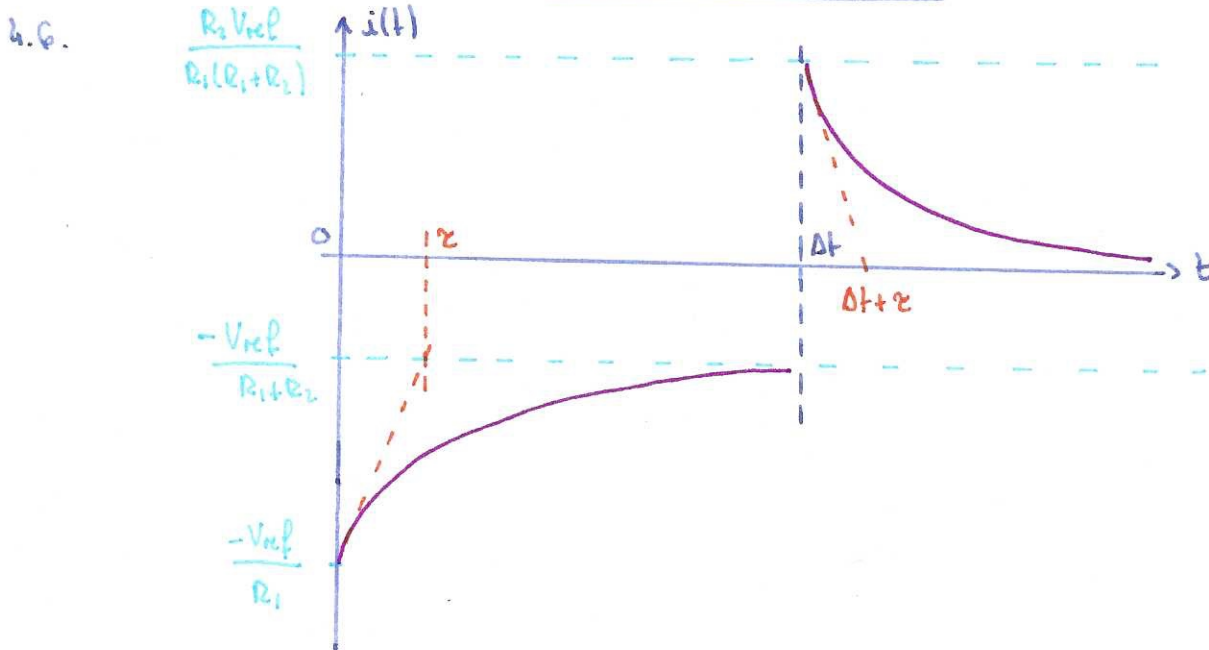
4.5.a. sur $]\Delta t, +\infty[$, $v_e(t) = 0$ donc $u(t) = B e^{-t/\tau}$ or condition de continuité : $u(\Delta t^-) = u(\Delta t^+) = u(\Delta t)$

$u(\Delta t^-) = u(\Delta t^+)$ soit $\frac{R_2 V_{ref}}{R_1 + R_2} = B e^{-\Delta t/\tau}$ soit $B = \frac{R_2 V_{ref}}{R_1 + R_2} e^{\Delta t/\tau}$

$$u(t) = \frac{R_2 V_{ref}}{R_1 + R_2} e^{-(t-\Delta t)/\tau}$$

4.5.b. $i(t) = \frac{u(t) - v_e(t)}{R_1} = \frac{u(t)}{R_1}$ sur l'intervalle $]\Delta t, +\infty[$

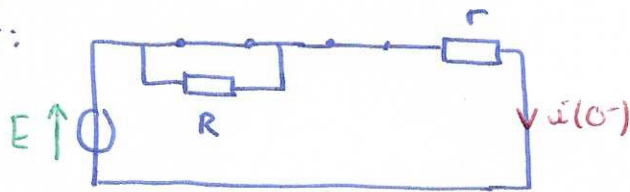
$$i(t) = \frac{R_2 V_{ref}}{R_1 (R_1 + R_2)} e^{-(t-\Delta t)/\tau}$$



Étincelle de rupture

1. A la date $t=0^-$, régime permanent continu atteint donc $u_L(0^-) = L \frac{di_L}{dt} \Big|_{0^-} = 0$

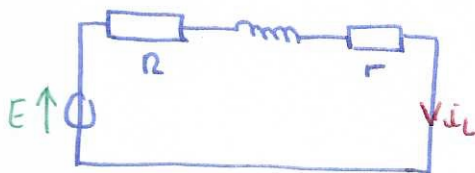
Schéma équivalent:



Pour des mailles: $E - u_r(0^-) = 0$ donc $u_r(0^-) = E = r i(0^-)$ donc:

$$i(0^-) = i_0 = \frac{E}{r} \quad (\text{AN}) \quad i_0 = 1,5 \text{ A}$$

2. Pour $t > 0$,



Pour des mailles: $E = u_R + u_r + u_L = (R+r)i_L + L \frac{di_L}{dt}$

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{R+r}{L} i_L = \frac{E}{L} \quad , \quad \text{on pose } \tau = \frac{L}{R+r}$$

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{\tau} i_L = \frac{E}{L}$$

La solution s'écrit donc: $i_L(t) = A e^{-t/\tau} + \frac{E}{R+r}$

or $i_L(0^+) = A + \frac{E}{R+r}$ et par continuité: $i_L(0^+) = i_L(0^-) = i_0$

$$\frac{E}{r} = A + \frac{E}{R+r} \quad \text{soit} \quad A = \frac{E}{r} - \frac{E}{R+r} \quad \text{soit} \quad i_L(t) = \left(\frac{E}{r} - \frac{E}{R+r} \right) e^{-t/\tau} + \frac{E}{R+r}$$

$i_L(t \rightarrow \infty) = \frac{E}{R+r}$ et si $R \gg r$ alors $i_L(t \rightarrow \infty) = \frac{E}{R} \rightarrow 0$

3. $u(t) = R i_L(t)$ donc

$$u(t) = \left(\frac{R}{r} - \frac{R}{R+r} \right) E e^{-t/\tau} + \frac{ER}{R+r}$$

on en déduit $u(0^+) = \frac{R}{r} E$ et $u(\infty) = \frac{RE}{R+r}$

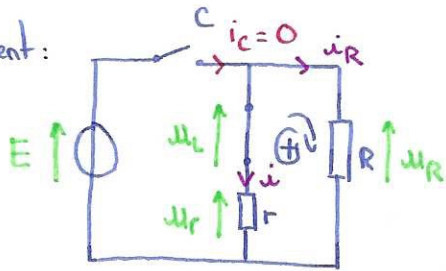
si $R \gg r$ alors $u(0^+) = \frac{RE}{r}$ et $u(\infty) = E$ or $u(0^+) = 4,5 \times 10^4 \text{ V}$

$\Rightarrow$ la tension aux bornes de l'interrupteur passe de $u(0^-) = 0$ à $u(0^+) = 4,5 \times 10^4 \text{ V}$, tension suffisante pour provoquer une étincelle ($\approx 3,6 \times 10^4 \text{ V}$)

Détermination des caractéristiques d'un circuit

1. En régime permanent ($t=0^-$ et $t=+\infty$), la bobine se comporte comme un fil
le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert

schéma équivalent :



loi des mailles : $u_r + \underbrace{u_L}_{=0} = u_R$

donc $u_r = u_R$ or la même intensité passe par r et R

$$(r+R)i = 0 \quad \text{donc} \quad \boxed{i(0^-) = i(\infty) = 0}$$

rmq:  aux conventions: $i = -i_R$ (Poi des noeuds)

A la date $t = 0^+$, la continuité de i passant dans la bobine $i(0^+) = 0$

2. Loi des noeuds : $i = i_C - i_R = C \frac{di_C}{dt} - \frac{u_R}{R}$

Loi des mailles : $\left\{ \begin{array}{l} E = u_C + u_L + u_R \\ u_R = u_L + u_r \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} i = C \frac{d}{dt} (E - u_L - u_r) - \frac{1}{R} (u_L + u_r) \\ \text{or } u_L = L \frac{di}{dt} \quad \text{et } u_r = r i \end{array} \right.$

done :
$$i = -LC \frac{d^2 i}{dt^2} - rC \frac{di}{dt} - \frac{L}{R} \frac{di}{dt} - \frac{r}{R} i$$

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0 \quad \text{avec}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 + \frac{r}{R}} \\ Q &= \frac{\sqrt{LC}}{rC + L/R} \sqrt{1 + \frac{r}{R}} \end{aligned} \right.$$

3. Equation caractéristique : $r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$, discriminant $\Delta = \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4 \right)$

régime pseudo-périodique : $\Delta < 0$ soit $Q > 1/2$ soit :

$$\frac{\sqrt{LC}}{RC + L/R} \sqrt{1 + \frac{r}{R}} > \frac{1}{2}$$

4. solution de l'équation caractéristique: $r_{1,2} = \frac{-\omega_0}{2Q} \pm i \frac{\sqrt{1-Q^2}}{2} = \frac{-\omega_0}{2Q} \pm i\omega \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$

on pose $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ et $\tau = \frac{2Q}{\omega}$, durée du régime transitoire

on en déduit: $i(t) = e^{-t/\tau} (A \cos \omega t + B \sin \omega t)$

$i(t=0^+) = A = 0$ donc $i(t) = e^{-t/\tau} B \sin \omega t$

$\frac{di(t=0^+)}{dt} = \frac{u_L(t=0^+)}{L} = \frac{1}{L} (E - \underbrace{u_C(t=0^+)}_{=0 (i(t=0^+)=0)} - \underbrace{u_R(t=0^+)}_{=0 \text{ (continuité de la tension)}}) = \frac{E}{L}$

$\frac{di(t=0^+)}{dt} = \frac{E}{L} = \omega B$ donc $i(t) = \frac{E}{\omega L} e^{-t/\tau} \sin \omega t$

5. On mesure $6T = 6,0 \text{ ms}$ donc $T = 1,0 \text{ ms}$

6. $S = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{u_r(t)}{u_r(t+T)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{0,42}{0,21} = \lim_{t \rightarrow \infty} 2,0 = 0,69$

7.
$$\begin{cases} u_r(t) = r i(t) = \frac{rE}{\omega L} e^{-t/\tau} \sin \omega t \\ u_r(t+T) = \frac{rE}{\omega L} e^{-t/\tau} \sin(\omega t + T\omega) e^{-T/\tau} \end{cases}$$
 or $\omega T = 2\pi$ donc $u_r(t+T) = e^{-T/\tau} u_r(t)$

on en déduit $S = \frac{T}{\tau} = \frac{2\pi\omega_0}{\omega 2Q}$ soit $S = \frac{\pi}{Q} \left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)^{-1/2}$

on en déduit $Q = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\pi^2}{S^2}}$ (AN) $Q = 4,6$

8. $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)^{-1/2}$ (AN) $\omega_0 = 6,3 \times 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$

9. (a) régime aperiodique donc ne convient pas

→ $\frac{di(t=0^+)}{dt} = \frac{E}{L}$ et le portrait de phase tourne dans le sens horaire: (d) ne convient pas

→ Q est élevée donc il y a plusieurs pseudo périodes: (c) convient