TD 6 : Calculs algébriques et primitives

OBJECTIFS :

- AL 12-1 : Savoir manipuler les symboles $\sum$ et $\prod$.
- AL 12-2 et AL 12-3 : Calculer des sommes et des produits en utilisant les sommes de référence et/ou en effectuant des changements d'indice.
- AL 12-4 et AL 12-5 : Calculer des sommes doubles rectangulaires ou triangulaires.
- AL 12-6 : Manipuler les coefficients binomiaux, calculer des sommes les faisant intervenir.
- AL 12-7 : Savoir utiliser la formule du binôme de Newton pour des nombres.
- AL 12-8 : Savoir utiliser la formule du binôme de Newton pour des matrices.
- AN 13-1 et AN 13-2 : Calculer une primitive ou une intégrale d'une fonction usuelle, d'une fonction rationnelle.
- AN 13-3 et AN 13-4 : Calculer une primitive ou une intégrale par intégration par parties ou par changement de variable
- AN 13-5 : Etablir une relation de récurrence vérifiée par une suite.
- AN 13-6 : Linéariser une fonction trigonométrique pour en déduire une primitive.
- AN 13-7 : Calculer une primitive ou une intégrale d'une fonction à valeurs réelles en utilisant des fonctions à valeurs complexes.

Calculs algébriques

EXERCICE 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

1. $S_n = \sum_{k=0}^{n} 3^{2k+1}$
2. $S_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-k}$
3. $S_n = \sum_{k=1}^{n} (3k + e^{-k} + 2)$
4. $S_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{3^{2k-1}}$
5. $S_n = \sum_{k=0}^{n} (3^{k+1} - 3k + 4)$
6. $S_n = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k$.
7. $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2+3k+2}$.
8. $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{k^2+4k+3}$.
9. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$.
10. $S_n = \sum_{k=1}^{n} k \times k!$
11. $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k$
12. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{k+1} 3^{n-k}$
13. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1}$
14. $S_n = \sum_{i=1}^{n} i 2^i$ en posant $j = i - 1$.

EXERCICE 2

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. En exprimant de deux manières différentes
$S_n = \sum_{k=0}^{n} \left[(k+1)^3 - k^3\right]$, calculer $T_n = \sum_{k=0}^{n} k^2$.
2. *Application :* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :
$T_n = \sum_{k=1}^{n} (3k+1)(2k-1)$ et $U_n = n + 2(n-1) + 3(n-2) + \cdots + (n-1)2 + n$.

EXERCICE 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

1. $S_n = \sum_{1 \le i,j \le n} i$
2. $S_n = \sum_{1 \le i \le j \le n} (i+j)$
3. $S_n = \sum_{1 \le i,j \le n} (i+j)^2$
4. $S_n = \sum_{1 \le i \le j \le n} |j-i|$
5. $S_n = \sum_{1 \le i \le j \le n} \dfrac{i}{j+1}$
6. $S_n = \sum_{1 \le i < j \le n} j$
7. $S_n = \sum_{1 \le i,j \le n} \max(i,j)$

EXERCICE 4

Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k}$.

1. Montrer que $\forall k \in [\![0;n]\!], \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. En posant $p = 2n+1-k$, déterminer une autre expression de S_n.
2. En déduire que $2S_n = 2^{2n+1}$ et conclure.

EXERCICE 5

Soit $n \ge 2$. Calculer les produits suivants :

1. $P_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \dfrac{1}{k}\right)$
2. $P_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \dfrac{1}{k^2}\right)$
3. $P_n = \prod_{k=2}^{n} \dfrac{k-1}{k+1}$
4. $P_n = \prod_{k=1}^{n} (6k-3)$

EXERCICE 6

1. Soit $k \in \mathbb{N} \backslash \{0;1\}$. Factoriser les nombres $k^3 - 1$ et $k^3 + 1$.
2. En déduire, sans utiliser de récurrence, que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \backslash \{0;1\}, \prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1} = \frac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)}$$

   .
3. En déduire que la suite $\left(\prod_{k=2}^{n} \dfrac{k^3-1}{k^3+1}\right)_{n \in \mathbb{N} \backslash \{0;1\}}$ est convergente et déterminer sa limite.

EXERCICE 7

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Calculer A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   Calculer B^2 puis B^k, pour tout $k \in \mathbb{N}$. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \\ -3 & -4 & -3 \end{pmatrix}$.

   On pose $C = B - A$.
   Calculer A^n et B^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire C^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Primitives

EXERCICE 8

Calculer les intégrales et primitives suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(t)\mathrm{e}^{\sin(t)}\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan(t)\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle F : x \mapsto \int^x te^{t^2}\,\mathrm{d}t$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
5. $\displaystyle F : x \mapsto \int^x \frac{1}{t}\ln(t)\,\mathrm{d}t$, pour tout $x \in \,]0;+\infty[$.
6. $\displaystyle F : x \mapsto \int^x \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t$, pour tout $x \in \,]1;+\infty[$.

EXERCICE 9

Calculer les intégrales et primitives suivantes en utilisant un changement de variable :

1. $\displaystyle F : x \mapsto \int^x \frac{1}{\cos t}\,\mathrm{d}t$, pour tout $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$, en posant $u = \sin t$.
2. $\displaystyle I = \int_1^4 \frac{x}{1+\sqrt{x}}dx$, en posant $t = 1+\sqrt{x}$.
3. $\displaystyle F : x \mapsto \int^x \cos(\ln t)\,\mathrm{d}t$, pour tout $x \in]0;+\infty[$, en posant $u = \ln t$.
4. $\displaystyle I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)dx$, en posant $t = \frac{\pi}{4} - x$.
5. $\displaystyle I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$, en posant $t = \pi - x$.
6. Soit $a \in [1;+\infty[$, $\displaystyle I_a = \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\mathrm{Arctan}(t)}{t}\,\mathrm{d}t$, en posant $x = \frac{1}{t}$.
7. $\displaystyle I = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ en posant $u = \frac{1}{t}$.

EXERCICE 10

Calculer une primitive de chacune des fonctions f suivantes :

1. $\displaystyle f : x \mapsto \frac{x}{x+1}$
2. $\displaystyle f : x \mapsto \frac{3x+1}{x-2}$
3. $\displaystyle f : x \mapsto \frac{1}{x^2-1}$
4. $\displaystyle f : x \mapsto \frac{2}{x^2-5x+6}$
5. $\displaystyle f : x \mapsto \frac{2}{4x^2+9}$
6. $\displaystyle f : x \mapsto \frac{2x^2+7}{x^2+9}$
7. $\displaystyle f : x \mapsto \frac{x+2}{x^2-3x-4}$
8. $\displaystyle f : x \mapsto \frac{2x-1}{x^2+4x+7}$
9. $\displaystyle f : x \mapsto \frac{x+3}{2x^2+1}$

EXERCICE 11

Calculer les intégrales et primitives suivantes :

1. $\displaystyle F : x \mapsto \int^x e^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$, pour tout $x \in]0;+\infty[$.
2. $\displaystyle F : x \mapsto \int^x \frac{1}{1+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$, pour tout $x \in]0;+\infty[$.
3. $\displaystyle F : x \mapsto \int^x \frac{1}{ch(t)}\,\mathrm{d}t$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. $\displaystyle I = \int_{-1}^{1} t\,\mathrm{Arctan}(t)\,\mathrm{d}t$
5. $\displaystyle I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\tan^2 x)dx$.
6. $\displaystyle F : x \mapsto \int^x \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
7. $\displaystyle F : x \mapsto \int^x \frac{t^2+3t+1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$.

8. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^2 x dx$.
9. $I = \int_0^1 (x^2-3)e^x dx$
10. $F : x \mapsto \int^x \frac{1}{\sin t}\,\mathrm{d}t$ pour tout $x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right]$.
11. $F : x \mapsto \int^x \cos^5(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 12

On considère les intégrales suivantes : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$.

Le but de l'exercice est de calculer les valeurs de I et de J.

1. **1ère méthode :**
   (a) Calculer $I+J$.
   (b) A l'aide d'un changement de variable, montrer que $I=J$ et en déduire leur valeur commune.
2. **2ème méthode :**
   Calculer I et J directement en utilisant une formule trigonométrique.

Exercice 13

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$.
   Etablir une relation de récurrence vérifiée par la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \int_0^{\pi} x^n \cos x dx$.
   Etablir une relation de récurrence vérifiée par la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 14

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,\mathrm{d}t$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer u_{n+2} en fonction de u_n.
2. En déduire u_{2n} et u_{2n+1} en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 15

Pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, on considère l'intégrale $I_{m,n} = \int_0^1 t^m(1-t)^n\,\mathrm{d}t$.

1. Exprimer $I_{m+1,n-1}$ en fonction de $I_{m,n}$ pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$.
2. En déduire une expression explicite de $I_{m,n}$ pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$.