

 **OBJECTIFS :**

- AN 15-1 : Connaître parfaitement les définitions des fonctions usuelles et leurs propriétés (ensemble de définition, parité, dérivée, sens de variation, limites, allure de la courbe, propriétés de calculs).
- AN 15-2 : Etudier une fonction faisant intervenir des fonctions usuelles.
- AN 15-3 : Simplifier une expression formée à partir de fonctions usuelles.
- AN 16-1 : Résoudre une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 ou 2.
- AN 16-2 : Trouver une solution particulière évidente d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 ou 2.
- AN 16-3 : Déterminer une solution particulière d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 par la méthode de la variation de la constante.
- AN 16-4 : Déterminer une solution particulière d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 selon la forme du second membre.
- AN 16-5 : Résoudre un problème de Cauchy d'ordre 1 ou 2.
- AN 16-6 : Résoudre une équation différentielle non linéaire d'ordre 1 ou 2 à l'aide d'un changement de fonction inconnue ou d'un changement de variable.

**EXERCICE 1**

Calculer les nombres suivants :

1.  $\text{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
2.  $\text{Arccos}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
3.  $\text{Arccos}(\cos 4\pi)$
4.  $\text{Arccos}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{4}\right)\right)$
5.  $\text{Arctan}\left(\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$
6.  $\text{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{23\pi}{9}\right)\right)$
7.  $\text{Arccos}\left(\cos\left(\frac{27\pi}{7}\right)\right)$
8.  $\text{Arccos}\left(\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)$
9.  $\text{Arcsin}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{9}\right)\right)$
10.  $\cos\left(\text{Arcsin}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$

**EXERCICE 2**

*Les questions sont indépendantes.*

1. Soit  $x \in \mathcal{D}$  où  $\mathcal{D}$  est un ensemble à déterminer.  
Calculer  $\cos(2\text{Arcsin}x)$  et  $\sin(2\text{Arccos}x)$ .
2. Soit  $x \in \mathcal{D}$  où  $\mathcal{D}$  est un ensemble à déterminer.  
Calculer  $\cos(\text{Arctan}x)$  et  $\sin(\text{Arctan}x)$ .

**EXERCICE 3**

On considère la fonction définie par  $f : x \mapsto \text{Arcsin}(\sin(2x))$ .

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
2. Etudier la parité et la périodicité de la fonction  $f$ .  
En déduire que l'on peut restreindre l'ensemble d'étude de la fonction  $f$  à l'intervalle  $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .
3. Déterminer une expression simplifiée de  $f(x)$  pour tout  $x \in I$ .
4. Préciser le sens de variation de la fonction  $f$  sur une période et tracer la courbe de la fonction  $f$ .

#### EXERCICE 4

On considère la fonction  $f : x \mapsto \operatorname{Arccos}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$  et  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Démontrer que  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .
2. (a) Montrer que  $\forall x \in [-1; 1], \operatorname{Arccos}x + \operatorname{Arccos}(-x) = \pi$ .  
(b) En déduire que le point  $\Omega$  de coordonnées  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$  est centre de symétrie de la courbe  $\mathcal{C}$ .

#### Définition :

Soit  $f$  une fonction définie sur un ensemble  $\mathcal{D}$  inclus dans  $\mathbb{R}$  et  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . On dit que :

- la droite d'équation  $x = a$  est **axe de symétrie** de la courbe  $\mathcal{C}$  si  $\forall h \in \mathbb{R} / a - h \in \mathcal{D}$  et  $a + h \in \mathcal{D}, f(a + h) = f(a - h)$ .
- le point  $A(a; b)$  est **centre de symétrie** de la courbe  $\mathcal{C}$  si  $\forall h \in \mathbb{R} / a - h \in \mathcal{D}$  et  $a + h \in \mathcal{D}, f(a + h) + f(a - h) = 2b$ .

3. (a) Calculer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.  
(b) Déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction  $f$  puis calculer sa fonction dérivée.  
(c) Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$ .
4. Déterminer une expression simplifiée de  $f$  sur  $[0; 1]$  puis sur  $[1; +\infty[$ .

#### EXERCICE 5

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par  $\forall x \in [0; +\infty[, f(x) = \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ .

1. Montrer que la fonction  $f$  est bien définie sur  $[0; +\infty[$ .
2. (a) Déterminer l'ensemble de dérivabilité de  $f$  puis calculer sa dérivée.  
(b) En déduire que  $\forall x \in [0; +\infty[, f(x) = \frac{\pi}{2} - 2\operatorname{Arctan}(\sqrt{x})$ .

3. Le but de cette question est de déterminer une primitive de la fonction  $f$  sur  $[0; +\infty[$ .

- (a) Justifier qu'une telle primitive existe.

*On admet que les primitives déterminées dans les questions b, c et d suivantes existent.*

- (b) Déterminer une primitive de la fonction  $t \mapsto \frac{t^2}{t^2 + 1}$  sur  $[0; +\infty[$ .
  - (c) Déterminer alors une primitive de la fonction  $t \mapsto 2t\operatorname{Arctan}(t)$  sur  $[0; +\infty[$ .
  - (d) En posant le changement de variable  $u = \sqrt{t}$ , calculer  $\int^x \operatorname{Arctan}(\sqrt{t}) dt$  pour tout  $x \in [0; +\infty[$ .
  - (e) Conclure.

#### Équations différentielles d'ordre 1

#### EXERCICE 6

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = xe^x$ .

Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 1 dont  $f$  est une solution.

#### EXERCICE 7

Résoudre les équations différentielles suivantes, les solutions étant à valeurs dans  $\mathbb{R}$  :

1.  $xy' - y = x^2 \cos x$  sur  $]0; +\infty[$ .
2.  $y' + y = \frac{1}{1+e^x}$  sur  $\mathbb{R}$ .
3.  $(1+x)y' + y = 1 + \ln(1+x)$  sur  $] -1; +\infty[$ .
4.  $(\cos x)y' + (\sin x)y = 1$  sur  $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ .

5.  $(t^2 + 1)y' + 2ty = 1$  sur  $\mathbb{R}$ .
6.  $y'\sqrt{1-x^2} + y = 1$  sur  $] -1; 1[$ .
7.  $(e^x - 1)y' + e^x y = 1$  sur  $]0; +\infty[$ .
8.  $2(t^2 - t)y' - y = t^2(t-1)\sqrt{\frac{1-t}{t}}$  sur  $]0; 1[$ .

### EXERCICE 8

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les problèmes de Cauchy suivants, les solutions étant à valeurs réelles :

(a) 
$$\begin{cases} y' - 2y &= 2x + 1 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

(b) 
$$\begin{cases} y' - 2y &= e^x \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

2. Résoudre l'équation différentielle  $y' - 2y = b$  dans chacun des cas suivants, les solutions étant à valeurs réelles :

(a)  $b(x) = \sin x$   
 (b)  $b(x) = xe^x + e^{2x}$

### EXERCICE 9

Résoudre les équations différentielles suivantes, les solutions étant à valeurs dans  $\mathbb{R}$  :

1.  $(1+x)^2 y'' + (1+x)y' - 2 = 0$  sur  $] -1; +\infty[$ .
2.  $x^2 + y^2 - 2xyy' = 0$  sur  $]0; +\infty[$ .

### EXERCICE 10

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

Déterminer les courbes d'équation  $y = f(x)$  avec  $f$  fonction dérivable sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  vérifiant la propriété géométrique suivante :

"Soit  $M$  un point parcourant la courbe de  $f$ . Si  $T$  est le point d'intersection de la tangente à la courbe de  $f$  en  $M$  avec l'axe  $(Ox)$  et si  $P$  est le projeté orthogonal de  $M$  sur  $(Ox)$  alors  $O$  est le milieu de  $[PT]$ ."

### EXERCICE 11

On souhaite résoudre l'équation différentielle  $(E) : y' - \frac{y}{x} - y^2 = -9x^2$  sur  $]0; +\infty[$ .

1. Déterminer le réel  $a \in ]0; +\infty[$  tel que la fonction  $f_0 : x \mapsto ax$  soit une solution particulière de  $(E)$  sur  $]0; +\infty[$ .
2. (a) Soit  $f$  une fonction définie sur  $]0; +\infty[$  telle que  
 $\forall x \in ]0; +\infty[, f(x) \neq f_0(x)$ .  
 Montrer que la fonction  $f$  est solution de  $(E)$  sur  $]0; +\infty[$  si la fonction  $g = \frac{1}{f_0 - f}$  est solution de l'équation différentielle  
 $(E') : z' + \left(6x + \frac{1}{x}\right)z = 1$  sur  $]0; +\infty[$ .  
 (b) Résoudre l'équation  $(E')$  sur  $]0; +\infty[$ .
3. En déduire les solutions de l'équation  $(E)$  sur  $]0; +\infty[$ .

## Équations différentielles d'ordre 2

### EXERCICE 12

Déterminer une équation différentielle ayant pour solutions :

1.  $x \mapsto e^{2x}$  et  $x \mapsto e^{-x}$
2.  $x \mapsto e^x$  et  $x \mapsto xe^x$
3.  $x \mapsto e^{2x} \cos(x)$  et  $x \mapsto e^{2x} \sin(x)$

### EXERCICE 13

Résoudre les équations différentielles suivantes sur  $\mathbb{R}$ , les solutions étant à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

- |  |   |
|--|---|
| 1. $(E_1) : y'' - 5y' + 4y = 2x$   | 5. $(E_5) : y'' + y = 2\cos^2 x$ avec<br>$y(\pi) = 1$ et $y'(\pi) = -1$ |
| 2. $(E_2) : y'' - 2y' + 5y = 5x^2 + 5$ avec<br>$y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ | 6. $(E_6) : y'' + 4y' + 4y = e^x \cos x$                                |
| 3. $(E_3) : y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$                                     | 7. $(E_7) : y'' + 2y' - 3y = 2sh(x)$                                    |
| 4. $(E_4) : y'' + y' - 2y = 10 \sin x$                                   |   |

### EXERCICE 14

Le but de cet exercice est de résoudre sur l'intervalle  $I = ]-1; +\infty[$  l'équation différentielle  $(E) : (1+x)y'' - 2y' + (1-x)y = (1+x)^3 e^x$ , les solutions sont à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

1. Résoudre l'équation  $(E') : (1+x)z' + 2xz = (1+x)^3$  sur  $I$ .
2. (a) Déterminer l'unique entier  $\alpha$  tel que la fonction  $x \mapsto e^{\alpha x}$  soit l'unique solution de l'équation homogène associée à  $(E)$ .  
(b) Soit  $f$  une fonction définie sur  $I$  et  $g$  la fonction définie sur  $I$  par  
 $\forall x \in I, g(x) = e^{\alpha x} f(x)$ .  
Montrer que  $g$  est solution de  $(E)$  sur  $I$  si  $f'$  est solution de  $(E')$  sur  $I$ .
3. Conclure.

### EXERCICE 15

Le but de cet exercice est de résoudre l'équation différentielle  $(E) : (1-x^2)y'' - xy' + 4y = x$  sur l'intervalle  $] -1; 1 [$ , les solutions sont à valeurs réelles.

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $(F) : z'' + 4z = \sin t$ , les solutions sont à valeurs réelles.
2. On pose  $I = \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ . Soit  $f$  une fonction définie sur  $] -1; 1 [$  et  $g$  la fonction définie sur  $I$  par  $\forall t \in I, g(t) = f(\sin t)$  et donc telle que  $\forall x \in ] -1; 1 [, f(x) = g(\text{Arcsin } x)$ .
  - (a) On admet que si  $f$  est deux fois dérivable sur  $] -1; 1 [$  alors  $g$  est deux fois dérivable sur  $I$ .  
Montrer la réciproque.
  - (b) Montrer que  $f$  est solution de  $(E)$  sur  $] -1; 1 [$  si  $g$  est solution de  $(F)$  sur  $I$ .
  - (c) Soit  $x \in ] -1; 1 [$ , donner l'expression simplifiée de  $\cos(\text{Arcsin } x)$ .
  - (d) Conclure.

### EXERCICE 16

1. Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle  $(E) : y'' + 4y = 2x + 1$ , les solutions sont à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .
2. Déterminer l'ensemble des fonctions  $f$  dérivables sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  telles que  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2f(-x) + x$ .  
*On pourra raisonner par analyse-synthèse et montrer qu'une fonction  $f$  solution du problème vérifie l'équation  $(E)$ .*

### EXERCICE 17

Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle  $(E) : z^{(4)} - 5z^{(3)} + 6z'' = 0$ , les solutions sont à valeurs réelles.

## EXERCICE 18

Le but de cet exercice est de résoudre, par deux méthodes différentes, l'équation différentielle  $(E)$  :  $x^2y'' - xy' + y = 2x$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ , les solutions étant à valeurs réelles.

### Partie A : Méthode par changement de variable.

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $(F)$  :  $z'' - 2z' + z = 2e^t$ , les solutions sont à valeurs réelles.
2. Soit  $f$  une fonction définie sur  $]0; +\infty[$  et  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = f(e^t)$  et donc telle que  $\forall x \in ]0; +\infty[, f(x) = g(\ln x)$ .
  - (a) Montrer que  $f$  est solution de  $(E)$  sur  $]0; +\infty[$  ssi  $g$  est solution de l'équation  $(F)$  sur  $\mathbb{R}$ .
  - (b) Conclure.

### Partie B : Méthode par changement de fonction.

1. Résoudre sur  $]0; +\infty[$  l'équation  $(E')$  :  $x^2u' + xu = 2$ .
2. Soit  $f$  et  $\phi$  deux fonctions définies sur  $]0; +\infty[$  telles que  $\forall x \in ]0; +\infty[, f(x) = x\phi(x)$ .  
On admet que  $f$  est deux fois dérivable sur  $]0; +\infty[$  ssi  $\phi$  est deux fois dérivable sur  $]0; +\infty[$ .
  - (a) Montrer que  $f$  est solution de  $(E)$  sur  $]0; +\infty[$  ssi  $\phi'$  est solution de  $(E')$  sur  $]0; +\infty[$ .
  - (b) Conclure.