TD 7

Eléments de correction

Exercice 2

Les questions sont indépendantes.

1. Soit $x \in \mathscr{D}$ où $\mathscr{D}$ est un ensemble à déterminer.
   Calculer $\cos(2Arcsin x)$ et $\sin(2Arccos x)$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$, $x \in \mathscr{D} \iff \begin{cases} x \in [-1;1] \\ 2Arcsin x \in \mathbb{R} \\ 2Arccos x \in \mathbb{R} \end{cases} \iff x \in [-1;1]$. Donc $\boxed{\mathscr{D} = [-1;1]}$.

   Soit $x \in [-1;1], \cos(2Arcsin x) = 1 - 2(\sin(Arcsin x))^2 = 1 - 2x^2$ et $\sin(2Arccos x) = 2\sin(Arccos x)\cos(Arccos x) = 2x\sqrt{1-x^2}$.

   Donc $\boxed{\forall x \in [-1;1], \cos(2Arcsin x) = 1 - 2x^2 \text{ et } \sin(2Arccos x) = 2x\sqrt{1-x^2}}$.

2. Soit $x \in \mathscr{D}$ où $\mathscr{D}$ est un ensemble à déterminer.
   Calculer $\cos(Arctan x)$ et $\sin(Arctan x)$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$, $x \in \mathscr{D} \iff \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ Arctan x \in \mathbb{R} \end{cases} \iff x \in \mathbb{R}$. Donc $\boxed{\mathscr{D} = \mathbb{R}}$.

   Soit $x \in \mathbb{R}, (\cos(Arctan x))^2 = \dfrac{1}{1 + (\tan(Arctan x))^2} = \dfrac{1}{1+x^2}$.

   Or $Arctan x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$ et $\forall X \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[, \cos X > 0$ donc $\cos(Arctan x) > 0$.

   De plus, $\dfrac{1}{1+x^2} > 0$.

   D'où $(\cos(Arctan x))^2 = \dfrac{1}{1+x^2} \iff \cos(Arctan x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

   $\sin(Arctan x) = \tan(Arctan x)\cos(Arctan x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

   Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \cos(Arctan x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \text{ et } \sin(Arctan x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}$.

Exercice 4

On considère la fonction $f : x \mapsto \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Démontrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

   La fonction Arccos est définie sur $[-1;1]$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \dfrac{2x}{1+x^2} \in [-1;1]$ (à montrer!) donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. (a) Montrer que $\forall x \in [-1;1], \operatorname{Arccos}(x) + \operatorname{Arccos}(-x) = \pi$.

   On considère f la fonction définie sur $[-1;1]$ par $f(x) = \operatorname{Arccos}(x) + \operatorname{Arccos}(-x)$. f est dérivable sur $]-1;1[$.
   Après calculs, on obtient que $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]-1;1[$.
   Donc f est constante sur $]-1;1[$. Or $f(0) = 2\operatorname{Arccos}(0) = \pi$ donc $\forall x \in]-1;1[, f(x) = \pi$.
   De plus, f est continue sur $[-1;1]$ donc $\forall x \in [-1;1], f(x) = \pi$.
   Ainsi $\boxed{\forall x \in [-1;1], \operatorname{Arccos}(x) + \operatorname{Arccos}(-x) = \pi.}$

   (b) En déduire que le point Ω de coordonnées $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ est centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$.

   Soit $h \in \mathbb{R}$. Alors $0 + h \in \mathbb{R}$ et $0 - h \in \mathbb{R}$.
   De plus, $f(-h) = \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{2(-h)}{1+(-h)^2}\right) = \operatorname{Arccos}\left(-\dfrac{2h}{1+h^2}\right)$.

   Donc $f(h) + f(-h) = \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{2h}{1+h^2}\right) + \operatorname{Arccos}\left(-\dfrac{2h}{1+h^2}\right) = \pi = 2 \times \dfrac{\pi}{2}$.

   Ainsi $\boxed{\text{le point } \Omega \text{ de coordonnées } \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right) \text{ est centre de symétrie de } \mathscr{C}}$.

3. (a) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{1+x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x\left(\frac{1}{x^2}+1\right)} = 0.$$

   De plus, $\operatorname{Arccos}(0) = \dfrac{\pi}{2}$ donc par composée, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{\pi}{2}}$.

   Par symétrie, $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = \dfrac{\pi}{2}}$.

(b) Déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction f puis calculer sa fonction dérivée.

Soit $\mathscr{D}$ l'ensemble de dérivabilité de la fonction f.

$f = \text{Arccos}(u)$ avec $u : x \mapsto \dfrac{2x}{1+x^2}$ et la fonction Arccos est dérivable sur $]-1;1[$.

Soit $x \in \mathbb{R}, x \in \mathscr{D} \iff \dfrac{2x}{1+x^2} \in]-1;1[\iff -1 < \dfrac{2x}{1+x^2} < 1$

$x \in \mathscr{D} \iff -(x+1)^2 < 0 < (x-1)^2 \iff x \neq -1$ et $x \neq 1$.

Donc $\boxed{f \text{ est dérivable sur }]-\infty;-1[, \text{ sur }]-1;1[, \text{ et sur }]1;+\infty[}$.

Déterminons la dérivée de f : $f' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$.

$u'(x) = \dfrac{2(1+x^2) - 2x \times 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ et

$\sqrt{1-[u(x)]^2} = \sqrt{1 - \dfrac{4x^2}{(1+x^2)^2}} = \sqrt{\dfrac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}} = \dfrac{|1-x^2|}{1+x^2}$.

Alors $f'(x) = -\dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \times \dfrac{1+x^2}{|1-x^2|} = -\dfrac{2}{1+x^2} \times \dfrac{1-x^2}{|1-x^2|}$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}, f'(x) = -\dfrac{2}{1+x^2} \times \dfrac{1-x^2}{|1-x^2|}$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1;1\}, f'(x) = -\frac{2(1-x)(1+x)}{(1+x^2)|1-x||1+x|}}.$$

(c) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

- Soit $x \in [0;1[$. Alors $|1-x| = 1-x$ et $|1+x| = 1+x$.
  D'où $f'(x) = -\dfrac{2}{1+x^2}$. Et dans ce cas, $f'(x) < 0$.
- Soit $x \in]1;+\infty[$. Alors $|1-x| = x-1$ et $|1+x| = 1+x$.
  D'où $f'(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$. Et dans ce cas, $f'(x) > 0$.

De plus, $f(1) = \text{Arccos}(1) = 0$.

On obtient donc le tableau de variations de f suivant (en utilisant la symétrie pour en déduire les variations de f sur $]-\infty;0]$) :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Variations de f	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	π	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

4. Déterminer une expression simplifiée de f sur $[0;1]$ puis sur $[1;+\infty[$.

- $\forall x \in [0;1[, f'(x) = -\dfrac{2}{1+x^2}$.
  Donc $\exists c \in \mathbb{R} / \forall x \in [0;1[, f(x) = -2\text{Arctan}x + c$.
  Or $f(0) = \text{Arccos}(0) = \dfrac{\pi}{2}$ donc $c = \dfrac{\pi}{2}$.
  Ainsi $\forall x \in [0;1[, f(x) = -2\text{Arctan}x + \dfrac{\pi}{2}$.
  De plus, f est continue sur $[0;1]$ donc
  $\boxed{\forall x \in [0;1], f(x) = -2\text{Arctan}x + \dfrac{\pi}{2}}$.
- $\forall x \in]1;+\infty[, f'(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$.
  Donc $\exists c' \in \mathbb{R} / \forall x \in]1;+\infty[, f(x) = 2\text{Arctan}x + c'$.
  De plus, f est continue sur $[1;+\infty[$ donc
  $\forall x \in [1;+\infty[, f(x) = 2\text{Arctan}x + c'$.
  Or $f(1) = 0$ donc $2\text{Arctan}(1) + c' = 0 \iff c' = -\dfrac{\pi}{2}$.
  Ainsi $\boxed{\forall x \in [1;+\infty[, f(x) = 2\text{Arctan}x - \dfrac{\pi}{2}}$.

EXERCICE 5

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $\forall x \in [0;+\infty[, f(x) = \text{Arcsin}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$.

1. Montrer que la fonction f est bien définie sur $[0;+\infty[$.

   Notons $\mathscr{D}$ l'ensemble de définition de f.

   Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
x \in \mathscr{D} &\iff \begin{cases} 1+x \neq 0 \\ -1 \leq \dfrac{1-x}{1+x} \leq 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x \neq -1 \\ -1 \leq \dfrac{1-x}{1+x} \quad \text{et} \quad \dfrac{1-x}{1+x} \leq 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x \neq -1 \\ \dfrac{2}{1+x} \geq 0 \quad \text{et} \quad \dfrac{2x}{1+x} \geq 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x > -1 \\ x < -1 \quad \text{ou} \quad x \geq 0 \end{cases} \\
&\iff x \geq 0
\end{aligned}.
$$

   Donc $\mathscr{D} = [0;+\infty[$. Ainsi $\boxed{f \text{ est définie sur } [0;+\infty[}$.

2. (a) Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f puis calculer sa dérivée.

   Notons $\mathscr{D}'$ l'ensemble de définition de f.

   Soit $x \in [0;+\infty[$.

$$
\begin{aligned}
x \in \mathscr{D}' &\iff -1 < \frac{1-x}{1+x} < 1 \\
&\iff \begin{cases} -1 < \dfrac{1-x}{1+x} \\ \dfrac{1-x}{1+x} < 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \dfrac{2}{1+x} > 0 \\ -\dfrac{2x}{1+x} < 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x > -1 \\ x < -1 \quad \text{ou} \quad x > 0 \end{cases} \\
&\iff x > 0
\end{aligned}.
$$

   Donc $\mathscr{D}' =]0;+\infty[$. Ainsi $\boxed{f \text{ est dérivable sur }]0;+\infty[}$.

   Soit $x \in]0;+\infty[, f'(x) = \dfrac{-\frac{2}{(1+x)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}} = \dfrac{-\frac{2}{(1+x)^2}}{\sqrt{\frac{4x}{(1+x)^2}}} = -\dfrac{2}{(1+x)^2} \times \dfrac{|1+x|}{2\sqrt{x}}$.

   Or $|1+x| = 1+x$ car $x > 0$. Donc $\boxed{\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) = -\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}}}$.

   (b) En déduire que $\forall x \in [0;+\infty[, f(x) = \dfrac{\pi}{2} - 2\text{Arctan}(\sqrt{x})$.

   Soit $x \in]0;+\infty[, f'(x) = -\dfrac{2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+(\sqrt{x})^2}$.

   Donc f' est de la forme $-2\dfrac{u'}{1+u^2}$ avec $u : x \mapsto \sqrt{x}$.

   Ainsi $\exists k \in \mathbb{R} / \forall x \in]0;+\infty[, f(x) = -2\text{Arctan}(\sqrt{x}) + k$.

   Or f est continue sur $[0;+\infty[$ (ceci est correctement justifié à la question suivante) donc $\exists k \in \mathbb{R} / \forall x \in [0;+\infty[, f(x) = -2\text{Arctan}(\sqrt{x}) + k$.

   De plus, $f(0) = \text{Arcsin}(1) = \dfrac{\pi}{2}$ donc $k = \dfrac{\pi}{2} + 2\text{Arctan}(\sqrt{0}) = \dfrac{\pi}{2}$.

   Ainsi $\boxed{\forall x \in [0;+\infty[, f(x) = \dfrac{\pi}{2} - 2\text{Arctan}(\sqrt{x})}$.

3. Le but de cette question est de déterminer une primitive de la fonction f sur $[0;+\infty[$.

   (a) Justifier qu'une telle primitive existe.

   La fonction $x \mapsto \dfrac{1-x}{1+x}$ est continue sur $[0;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues sur cet intervalle dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, elle est à valeurs dans $[-1;1]$. Or la fonction Arcsin est continue sur $[-1;1]$ donc f est continue sur $[0;+\infty[$.

   Ainsi $\boxed{f \text{ admet des primitives sur } [0;+\infty[}$.

   On admet que les primitives déterminées dans les questions b, c et d suivantes existent.

   (b) Déterminer une primitive de la fonction $t \mapsto \dfrac{t^2}{t^2+1}$ sur $[0;+\infty[$.

   Soit $x \in [0;+\infty[$.

$$\int^x \frac{t^2}{t^2+1} dt = \int^x \frac{t^2+1-1}{t^2+1} dt = \int^x \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right) dt = x - \text{Arctan}(x).$$

Donc $\boxed{\forall x \in [0;+\infty[, \int^{x} \frac{t^2}{t^2+1}dt = x - \operatorname{Arctan}(x)}$.

(c) Déterminer alors une primitive de la fonction $t \mapsto 2t\operatorname{Arctan}(t)$ sur $[0;+\infty[$.

Soit $x \in [0;+\infty[$.

On calcule $\int^{x} 2t\operatorname{Arctan}(t)dt$. Soit $t \in [0;+\infty[$.

On pose $\begin{cases} u'(t) = 2t \\ v(t) = \operatorname{Arctan}(t) \end{cases}$. Alors $\begin{cases} u(t) = t^2 \\ v'(t) = \dfrac{1}{1+t^2} \end{cases}$.

u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;+\infty[$. Alors par IPP,

$$\begin{aligned}\int^{x} \frac{t^2}{t^2+1}dt &= \left[t^2\operatorname{Arctan}(t)\right]^{x} - \int^{x}\frac{t^2}{1+t^2}dt \\ &= x^2\operatorname{Arctan}(x) - x + \operatorname{Arctan}(x)\end{aligned}.$$

Donc $\boxed{\text{une primitive de de la fonction } t \mapsto 2t\operatorname{Arctan}(t) \text{ sur } [0;+\infty[}$ $\boxed{\text{est la fonction } x \mapsto (x^2+1)\operatorname{Arctan}(x) - x}$.

(d) En posant le changement de variable $u = \sqrt{t}$, calculer $\int^{x} \operatorname{Arctan}(\sqrt{t})dt$ pour tout $x \in [0;+\infty[$.

Soit $t \in [0;+\infty[$. Posons $u = \sqrt{t}$. Alors $u \in [0;+\infty[$ et $t = u^2$.

Soit $\phi : u \mapsto u^2$, ϕ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;+\infty[$ et $dt = \phi'(u)du = 2udu$.

Soit $x \in [0;+\infty[$. Par changement de variable,

$$\begin{aligned}\int^{x} \operatorname{Arctan}(\sqrt{t})dt &= \int^{\sqrt{x}} Arctan(u) \times 2udu \\ &= \left[(u^2+1)Arctan u - u\right]^{\sqrt{x}} \\ &= (x+1)\operatorname{Arctan}(\sqrt{x}) - \sqrt{x}\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\int^{x} Arctan(\sqrt{t})dt = (x+1)Arctan(\sqrt{x}) - \sqrt{x}}$.

(e) Conclure.

Soit $x \in [0;+\infty[$.

$$\begin{aligned}\int^{x} f(t)dt &= \int^{x}\left(\frac{\pi}{2} - 2\operatorname{Arctan}(\sqrt{t})\right)dt \\ &= \frac{\pi}{2}x - 2(x+1)\operatorname{Arctan}(\sqrt{x}) + 2\sqrt{x}\end{aligned}.$$

Donc $\boxed{\text{une primitive de } f \text{ sur } [0;+\infty[\text{ est la fonction}}$ $\boxed{x \mapsto \frac{\pi}{2}x - 2(x+1)\operatorname{Arctan}(\sqrt{x}) + 2\sqrt{x}}$.

EXERCICE 9

Résoudre les équations différentielles suivantes, les solutions étant à valeurs dans $\mathbb{R}$:

1. $(1+x)^2y" + (1+x)y' - 2 = 0$ sur $]-1;+\infty[$.

   Soit $x \in]-1;+\infty[$.

   $(E) : (1+x)^2y" + (1+x)y' - 2 = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} z = y' \\ (F) : (1+x)^2z' + (1+x)z = 2 \end{cases}$

   On résout (F) et on obtient $S_{]-1;+\infty[}(F) = \left\{x \mapsto \dfrac{C + 2\ln(x+1)}{x+1}, C \in \mathbb{R}\right\}$.

   Or $$\begin{aligned}\int^{x}\frac{C+\ln(t+1)}{t+1}dt &= \int^{x}\frac{C}{t+1}dt + \int^{x}2\frac{\ln(t+1)}{t+1}dt \\ &= C\ln|x+1| + [\ln(x+1)]^2 \\ &= C\ln(x+1) + [\ln(x+1)]^2\end{aligned}$$

   Donc $\boxed{S_{]-1;+\infty[}(E) = \left\{x \mapsto C\ln(x+1) + [\ln(x+1)]^2 + D, (C,D) \in \mathbb{R}^2\right\}}$.

2. $x^2 + y^2 - 2xyy' = 0$ sur $]0;+\infty[$.

   Soit $x \in]0;+\infty[$.

   $(E) : x^2 + y^2 - 2xyy' = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} z = y^2 \\ (F) : xz' - z = x^2 \end{cases}$

   On résout (F) et on obtient $S_{]0;+\infty[}(F) = \left\{x \mapsto Cx + x^2, C \in \mathbb{R}\right\}$.

   Ainsi les solutions de (E) sont les fonctions f définies sur $]0;+\infty[$ telles que $\forall x \in]0;+\infty[, (f(x))^2 = Cx + x^2$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Pour pourvoir utiliser la fonction racine carrée, il faut avoir :
$\forall x\in]0;+\infty[, Cx+x^2\geq 0$.
Soit $x\in]0;+\infty[, Cx+x^2\geq 0 \iff x(x+C)\geq 0 \iff x+C\geq 0 \iff C\geq -x$.
Donc C est supérieur à tout nombre strictement négatif.
Ainsi $Cx+x^2\geq 0 \iff C\geq 0$.
Donc $\boxed{S_{]0;+\infty[}(E)=\left\{x\mapsto \sqrt{Cx+x^2}, C\in\mathbb{R}_+ ; x\mapsto -\sqrt{C'x+x^2}, C'\in\mathbb{R}_+\right\}}$.

Exercice 10

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.
Déterminer les courbes d'équation $y=f(x)$ avec f fonction dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ vérifiant la propriété géométrique suivante :
"Soit M un point parcourant la courbe de f. Si T est le point d'intersection de la tangente à la courbe de f en M avec l'axe (Ox) et si P est le projeté orthogonal de M sur (Ox) alors O est le milieu de $[PT]$."
Raisonnons par analyse-synthèse.

- Analyse : Supposons qu'il existe une fonction f dérivable sur $]0;+\infty[$ dont la courbe $\mathscr{C}$ vérifie la propriété demandée.
  Soit M le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse $t\in]0;+\infty[$. Alors la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point M a pour équation $y=f'(t)(x-t)+f(t)$.
  Supposons que f' ne s'annule pas en t alors le point T, intersection de la tangente et de l'axe des abscisses, a pour coordonnées $\left(-\dfrac{f(t)}{f'(t)}+t;0\right)$.
  Le point P, projeté orthogonal de M sur l'axe (Ox) a pour coordonnées $(t;0)$.
  Alors O milieu de $[PT] \iff \begin{cases} x_P+x_T=0\\ y_P+y_T=0\end{cases} \iff -\dfrac{f(t)}{f'(t)}+t+t=0$.
  O milieu de $[PT] \iff f'(t)-\dfrac{1}{2t}f(t)=0 \iff f$ solution de $(E) : y'-\dfrac{1}{2t}y=0$.
  Donc O milieu de $[PT] \iff \exists C\in\mathbb{R} / \forall t\in]0;+\infty[, f(t)=C\sqrt{t}$.
- Synthèse : Soit $C\in\mathbb{R}$ et $f : x\mapsto C\sqrt{x}$ fonction définie sur $]0;+\infty[$.
  Soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.
  f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\forall x\in]0;+\infty[, f'(x)=\dfrac{C}{2\sqrt{x}}$.
  Soit M le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse a.
  Alors la tangente à $\mathscr{C}$ au point M a pour équation $y=\dfrac{C}{2\sqrt{a}}(x-a)+C\sqrt{a}$.
  Donc T a pour coordonnées $(-a;0)$ et P a pour coordonnées $(a;0)$.
  Ainsi O est le milieu de $[PT]$.
  Donc $\boxed{\text{les fonctions cherchées sont les fonctions } f \text{ définies sur }]0;+\infty[\text{ par}}$
  $\boxed{\forall x\in]0;+\infty[, f(x)=C\sqrt{x}, C\in\mathbb{R}.}$

Exercice 13

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E_7) : y"+2y'-3y=2\text{sh}(x)$, les solutions sont à valeurs réelles.
(*) Résolution de l'équation homogène : $y''+2y'-3y=0$.
$(E_c) : r^2+2r-3=0$, 1 est racine évidente, -3 est l'autre racine.
Donc $S_{\mathbb{R}}(H)=\{x\mapsto C_1e^x+C_2e^{-3x}, (C_1,C_2)\in\mathbb{R}^2\}$.
(*) Recherche d'une solution particulière :
Le second membre est la fonction $x\mapsto 2\,\text{sh}\,x$.
On détermine une solution particulière f_1 de $(F_1) : y''+2y'-3y=e^x$ et une solution particulière f_2 de $(F_2) : y''+2y'-3y=e^{-x}$.
-1 est racine simple de l'équation (E_c) donc $f_1 : x\mapsto C_0xe^x, C_0\in\mathbb{R}$,
est une solution particulière de (F_1).
f_1 est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
Soit $x\in\mathbb{R}, f_1'(x)=C_0e^x(1+x)$ et $f_1''(x)=C_0e^x(2+x)$.
f_1 vérifie $(F_1) \iff f_1''(x)+2f_1'(x)-3f_1(x)=e^x \iff C_0e^x(2+x+2(1+x)-3x)=e^x \iff C_0=\dfrac{1}{4}$. Alors $f_1(x)=\dfrac{1}{4}xe^x$.
-1 n'est pas racine de l'équation (E_c) donc $f_2 : x\mapsto D_0e^{-x}, D_0\in\mathbb{R}$, est une solution particulière de (F_2).
f_2 est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
Soit $x\in\mathbb{R}, f_2'(x)=-D_0e^{-x}$ et $f_2''(x)=D_0e^{-x}$.
f_2 vérifie $(F_2) \iff f_2''(x)+2f_2'(x)-3f_2(x)=e^{-x} \iff D_0e^{-x}(1-2-3)=e^{-x} \iff D_0=-\dfrac{1}{4}$. Alors $f_2(x)=-\dfrac{1}{4}e^{-x}$.
Ainsi, par principe de superposition des solutions, $f_0 : x\mapsto \dfrac{1}{4}xe^x-\dfrac{1}{4}e^{-x}$ est une solution particulière de (E_7).

(*) Solution générale :

$$\boxed{S_{\mathbb{R}}(E_7) = \left\{ x \mapsto C_1 e^x + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{4} x e^x - \frac{1}{4} e^{-x}, (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}}.$$

EXERCICE 16

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y" + 4y = 2x + 1$, les solutions sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.

   En classe.

2. Déterminer l'ensemble des fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2f(-x) + x$.

   On pourra raisonner par analyse-synthèse et montrer qu'une fonction f solution du problème vérifie l'équation (E).

   Soit S l'ensemble cherché.

   Analyse : Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2f(-x) + x$.

   Les fonctions $-id_{\mathbb{R}}$ et f sont dérivables sur $\mathbb{R}$, donc par composée,

   la fonction $x \mapsto f(-x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors par somme avec la fonction identité, f' est dérivable sur $\mathbb{R}$.

   Soit $x \in \mathbb{R}, f''(x) = -2f'(-x) + 1$.

   Or $f'(x) = 2f(-x) + x$, d'où $f'(-x) = 2f(x) - x$.

   Donc $f''(x) = -2(2f(x) - x) + 1 = -4f(x) + 2x + 1$, alors $f''(x) + 4f(x) = 2x + 1$.

   Ainsi f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie (E), donc f est solution de (E).

   Synthèse : On pose $f : x \mapsto C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$, avec C_1 et C_2 deux réels.

   Cherchons les valeurs de C_1 et C_2 pour que f appartienne à S.

   f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

   Soit $x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x + \frac{1}{2}$.

   De plus, $2f(-x) + x = 2C_1 \cos 2x - 2C_2 \sin 2x + \frac{1}{2}$.

   Alors $f'(x) = 2f(-x) + x \iff -2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x + \frac{1}{2} = 2C_1 \cos 2x - 2C_2 \sin 2x + \frac{1}{2} \iff (C_2 - C_1)(\cos 2x + \sin 2x) = 0$.

   En particulier pour $x = 0, C_1 = C_2$.

   Ainsi $\boxed{S = \left\{ x \mapsto C(\cos 2x + \sin 2x) + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}, C \in \mathbb{R} \right\}}$.