TD 8 : Calculs dans $\mathbb{C}$ et suites numériques

OBJECTIFS :

- AL 17-1 : Déterminer les racines carrées d'un nombre complexe.
- AL 17-2 : Résoudre des équations à coefficients complexes.
- AL 17-3 : Déterminer les racines $n-$ièmes d'un nombre complexe.
- AL 17-4 : Savoir résoudre des équations faisant intervenir l'exponentielle complexe.
- AN 17-5 : Déterminer le terme général d'une suite usuelle.
- AN 17-6 : Etudier des suites et en extraire leurs principales propriétés.
- AN 17-7, AN 17-8 et AN 17-9 : Savoir étudier la convergence d'une suite définie de manière explicite, implicite ou par récurrence.
- AN 17-10 : Etudier des suites en utilisant des suites extraites.
- AN 17-11 : Montrer que des suites sont adjacentes.
- AN 17-12 : Etudier la convergence d'une suite à valeurs complexes.

Calculs dans $\mathbb{C}$

Exercice 1

Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

$Z_1 = 12i$	$Z_3 = 3e^{i\frac{\pi}{5}}$	$Z_5 = -\sqrt{5} + i\sqrt{15}$	$Z_7 = -9e^{\frac{4i\pi}{9}}$
$Z_2 = \dfrac{1}{2i}$	$Z_4 = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$	$Z_6 = -15 + 8i$	

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes d'inconnue complexe z :

1. $z^2 + (5 - 14i)z - 2(12 + 5i) = 0$
2. $z^2 - (1 - 5i)z - 10 + 5i = 0$
3. $z^2 - 2\cos\theta z + 1 = 0$ où $\theta \in \mathbb{R}$
4. $(z^2 - 4z + 5)^2 + (z + 1)^2 = 0$
5. $z^4 + (4 - 2i)z^2 - 8i = 0$
6. $z^3 - z^2 + z - 1 = 0$
7. $z^3 + (1+i)z^2 + (4-i)z + 12 - 6i = 0$ sachant que l'équation admet une solution réelle.

Exercice 3

Les questions sont indépendantes.

1. Déterminer les racines cubiques complexes de $Z_1 = -4\sqrt{2}(1 + i)$.
2. Déterminer les racines quatrièmes complexes de $Z_2 = -16i$ et $Z_3 = -7 + 24i$.
3. Simplifier $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$ puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 + 2 + 2i = 0$.

Exercice 4

1. Soit $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.
   (a) Déterminer la forme exponentielle de $\dfrac{1 + i\tan\alpha}{1 - i\tan\alpha}$.
   (b) Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{-i\}$, $\forall \theta \in \mathbb{R}\setminus\{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, $\dfrac{1 + iz}{1 - iz} = e^{i\theta} \iff z = \tan\dfrac{\theta}{2}$.
   (c) Déduire des questions précédentes la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(E_\alpha) : \left(\dfrac{1 + iz}{1 - iz}\right)^3 = \dfrac{1 + i\tan\alpha}{1 - i\tan\alpha}$, d'inconnue α.
2. Montrer que l'équation $\left(\dfrac{1 + iz}{1 - iz}\right)^3 = \dfrac{1 + i}{1 - i}$ a pour ensemble de solutions $S = \{-1; 2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}\}$.
3. Déduire la valeur exacte de $\tan\dfrac{\pi}{12}$.

EXERCICE 5

On considère l'application exp de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par
$\forall z \in \mathbb{C}, exp(z) = e^{\mathrm{Re}(z)} e^{i\,\mathrm{Im}(z)}$.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, le nombre complexe $exp(z)$ est également noté e^z et est appelé **exponentielle de** z.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Déterminer le module et un argument de e^z.
2. Montrer que $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, e^z = e^{z'} \Longleftrightarrow z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$ où $2i\pi\mathbb{Z} = \{2ik\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
   - $e^z = 3 - 3i\sqrt{3}$
   - $ie^z = 1 + i$

Généralités sur les suites numériques.

EXERCICE 6

Les questions 1 *à* 4 *sont indépendantes.*

1. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = -3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n - 2}{3}$.
   Déterminer son terme général, son sens de variation et sa limite éventuelle. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.
2. Déterminer le terme général et le sens de variation de la suite suivante :
   (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = -1, u_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n \end{cases}$.
3. On considère la suite (u_n) définie par
   $\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 10u_{n+1} - 21u_n + 12n \quad (R) \end{cases}$.
   (a) Déterminer la suite (v_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \alpha n + \beta$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, telle que (v_n) vérifie la relation (R).
   (b) Soit (w_n) la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = u_n - v_n$.
   Montrer que (w_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 et déterminer son terme général.
   (c) En déduire le terme général de la suite (u_n).
4. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} u_n$$
   (a) Calculer u_1 et u_2.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$.

EXERCICE 7

Etudier la monotonie et la convergence des suites (u_n) suivantes :

1. $\begin{cases} u_0 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 1} \end{cases}$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -\dfrac{1}{n+2}$
3. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -\dfrac{1}{u_n + 2} \end{cases}$.
4. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n + u_n^2}{2} \end{cases}$.
5. $\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n + u_n^2}{2} \end{cases}$.
6. $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n + u_n^2}{2} \end{cases}$.

EXERCICE 8

1. Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_n(x) = \ln x + \dfrac{x}{n} - 1$.
   Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[1; e]$. On notera cette solution α_n.
   Pour la suite, on considère $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
   On note (Γ) la courbe représentative de la fonction ln.
   (a) Déterminer une équation de la droite Δ_n passant par le point $A(0;1)$ et le point $B_n(n;0)$.
   (b) Faire une figure représentant la courbe (Γ) et les droites Δ_1, Δ_2 et Δ_3.
   (c) Montrer que α_n est l'abscisse du point d'intersection de (Γ) et de Δ_n.
   (d) Préciser la valeur de α_1 puis faire une conjecture sur le sens de variation de la suite (α_n).
3. (a) Exprimer $\ln(\alpha_n)$ en fonction de n et de α_n.
   (b) Exprimer $f_{n+1}(\alpha_n)$ en fonction de n et de α_n et vérifier que $f_{n+1}(\alpha_n) < 0$.
   (c) En déduire une relation entre $f_{n+1}(\alpha_n)$ et $f_{n+1}(\alpha_{n+1})$ puis le sens de variation de la suite (α_n).

EXERCICE 9

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses? Justifier à l'aide d'une démonstration ou d'un contre-exemple (suite définie de manière explicite).

1. Une suite croissante à partir d'un certain rang est minorée.
2. Une suite convergente est nécessairement monotone à partir d'un certain rang.
3. Une suite divergeant vers $+\infty$ est nécessairement croissante à partir d'un certain rang.
4. Si (v_n) est croissante et si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq v_n$, alors (u_n) est croissante.
5. Si $(|u_n|)$ converge, alors (u_n) converge aussi.
6. Si $(|u_n|)$ converge vers 0, alors (u_n) converge aussi vers 0.

EXERCICE 10

Les questions sont indépendantes.

1. Montrer que si la suite (x_n) converge alors la suite $(x_{2n} - x_n)$ converge vers 0. En déduire que la suite de terme général $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ est divergente.
2. Soit une suite réelle (x_n). On suppose que les suites $(x_{2n}), (x_{2n+1})$ et (x_{3n}) convergent. Montrer que la suite (x_n) converge.

EXERCICE 11

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{5 - u_n^2}} \end{cases}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n \leq 2$ puis étudier la convergence de la suite (u_n).
2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n^2$. Calculer v_0 et expliciter la relation de récurrence vérifiée par la suite (v_n).
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = \dfrac{1}{v_n}$. Justifier que la suite (w_n) est bien définie et montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = 5w_n - 1$.
   Déterminer le terme général de la suite (w_n).
   (c) Déduire des questions précédentes le terme général de la suite (u_n) et conclure sur la convergence de la suite (u_n).

EXERCICE 12

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^n(x)}\,dx$.

1. Justifier que I_n existe pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = \dfrac{(\sqrt{2})^n}{n+1} + \dfrac{n}{n+1} I_n$.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} - I_n \geq 0$.
   (c) En déduire que la suite (I_n) admet une limite.
   (d) Montrer que cette limite est égale à $+\infty$.

EXERCICE 13

On pose $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A^2 est combinaison linéaire de I_3 et de A.
2. En déduire qu'il existe deux suites de nombres réels (a_k) et (b_k) telles que $\forall k \in \mathbb{N}, A^k = a_k I_3 + b_k A$.
3. Déterminer une expression explicite de a_k, b_k puis de A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 14

Les questions 1 *à* 3 *sont indépendantes.*

1. Soit (x_n) et (y_n) deux suites réelles telles que $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \dfrac{1}{2}(x_n - y_n)$ et $y_{n+1} = \dfrac{1}{2}(x_n + y_n)$.
   Etudier la convergence de la suite complexe (z_n) où $\forall n \in \mathbb{N}, z_n = x_n + i\,y_n$, puis celle des suites (x_n) et (y_n).
2. Etudier la convergence de la suite (z_n) définie par $z_0 \in \mathbb{C}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \dfrac{i}{2} z_n + 1$.
3. Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n^2 + u_n v_n + v_n^2) = 0$.
   En considérant la suite de terme général $z_n = u_n - j\,v_n$ où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers 0.