

EXERCICE 4

1. Soit $\alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$.

(a) Déterminer la forme exponentielle de $\frac{1 + i \tan \alpha}{1 - i \tan \alpha}$.

$$\frac{1 + i \tan \alpha}{1 - i \tan \alpha} = \frac{1 + i \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{1 - i \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{\cos \alpha + i \sin \alpha}{\cos \alpha - i \sin \alpha} = \frac{e^{i\alpha}}{e^{-i\alpha}} = e^{2i\alpha}.$$

$$\text{Donc } \boxed{\frac{1 + i \tan \alpha}{1 - i \tan \alpha} = e^{2i\alpha}}.$$

(b) Montrer que $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}, \forall \theta \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}, \frac{1 + iz}{1 - iz} = e^{i\theta} \iff$

$$z = \tan \frac{\theta}{2}.$$

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

$$\begin{aligned} \frac{1 + iz}{1 - iz} = e^{i\theta} &\iff 1 + iz = e^{i\theta}(1 - iz) \\ &\iff iz(e^{i\theta} + 1) = e^{i\theta} - 1 \\ &\iff z = \frac{e^{i\theta} - 1}{i(e^{i\theta} + 1)} \quad \text{car } e^{i\theta} \neq -1 \end{aligned}$$

$$\text{Or } \frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}})}{e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}})} = \frac{2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = i \tan\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

$$\text{Donc } \frac{1 + iz}{1 - iz} = e^{i\theta} \iff z = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

$$\text{Donc } \boxed{\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}, \forall \theta \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}, \frac{1 + iz}{1 - iz} = e^{i\theta} \iff z = \tan \frac{\theta}{2}}.$$

(c) Dédurre des questions précédentes la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(E_\alpha) : \left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right)^3 = \frac{1 + i \tan \alpha}{1 - i \tan \alpha}$, d'inconnue α .

Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble de définition de E_α et $z \in \mathbb{C}$.

$$z \in \mathcal{D} \iff 1 - iz = 0 \iff 1 - iz \neq 0 \iff iz \neq 1 \iff z \neq -i.$$

Donc $\mathcal{D} = \mathbb{C} \setminus \{-i\}$.

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}, \left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right)^3 = \frac{1 + i \tan \alpha}{1 - i \tan \alpha} \iff \left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right)^3 = e^{2i\alpha}$ d'après la question 1)a.

Les solutions de (E_α) sont donc les nombres complexes z tels que $\frac{1 + iz}{1 - iz}$ est une racine cubique de $e^{2i\alpha}$.

$$\text{Donc } (E_\alpha) \iff \frac{1 + iz}{1 - iz} = e^{i\frac{2\alpha + 2l\pi}{3}}, l \in \llbracket 0; 2 \rrbracket.$$

$$\text{Soit } l \in \llbracket 0; 2 \rrbracket. \text{ On pose } \theta_l = \frac{2\alpha + 2l\pi}{3}.$$

Vérifions que $\theta_l \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ pour utiliser la question 1)b.

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ donc } \frac{-\pi + 2l\pi}{3} < \theta_l < \frac{\pi + 2l\pi}{3}.$$

- $-\frac{\pi}{3} < \theta_0 < \frac{\pi}{3}$ donc $\forall k \in \mathbb{Z}, \theta_0 \neq \pi + 2k\pi$.
- $\frac{\pi}{3} < \theta_1 < \pi$ donc $\forall k \in \mathbb{Z}, \theta_1 \neq \pi + 2k\pi$.
- $\pi < \theta_2 < \frac{5\pi}{3}$ donc $\forall k \in \mathbb{Z}, \theta_2 \neq \pi + 2k\pi$.

Donc $\forall l \in \llbracket 0; 2 \rrbracket, \theta_l \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Donc d'après la question 1)b, $(E_\alpha) \iff z = \tan \frac{\alpha + l\pi}{3}, l \in \llbracket 0; 2 \rrbracket$.

$$\text{D'où } \boxed{S = \left\{ \tan \frac{\alpha}{3}; \tan \frac{\alpha + \pi}{3}; \tan \frac{\alpha + 2\pi}{3} \right\}}.$$

2. Montrer que l'équation $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^3 = \frac{1+i}{1-i}$ a pour ensemble de solutions

$$S = \{-1; 2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}\}.$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^3 = \frac{1+i}{1-i} &\iff \left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^3 = i \\ &\iff 1+3iz-3z^2-iz^3 = i(1-3iz-3z^2+iz^3) \\ &\iff 1-i-3(1-i)z-3(1-i)z^2+(1-i)z^3 = 0 \\ &\iff (1-i)(1-3z-z^2+z^3) = 0 \\ &\iff 1-3z-z^2+z^3 = 0 \\ &\iff (z+1)(z^2-4z+1) = 0 \\ &\iff z+1=0 \quad \text{ou} \quad z^2-4z+1=0 \\ &\iff z=-1 \quad \text{ou} \quad z=2-\sqrt{3} \quad \text{ou} \quad z=2+\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\text{Donc } S = \{-1; 2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}\}.$$

3. Déduire la valeur exacte de $\tan \frac{\pi}{12}$.

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^3 = \frac{1+i}{1-i} \iff (E_{\frac{\pi}{4}}) \text{ donc}$$

$$\{-1; 2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}\} = \left\{\tan \frac{\pi}{12}; \tan \frac{5\pi}{12}; \tan \frac{3\pi}{4}\right\}.$$

$$\text{Or } \tan \frac{3\pi}{4} = -1 \text{ donc } \tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3} \text{ ou } 2 + \sqrt{3}.$$

De plus, $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{12} < \frac{5\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$ et la fonction tangente est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ donc $\tan \frac{\pi}{12} < \tan \frac{5\pi}{12}$.

$$\text{Or } 2 - \sqrt{3} < 2 + \sqrt{3} \text{ donc } \tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}.$$