TD 8

Eléments de correction

EXERCICE 4

1. Soit $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

   (a) Déterminer la forme exponentielle de $\dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$.

   $$\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} = \frac{1+i\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1-i\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos\alpha-i\sin\alpha} = \frac{e^{i\alpha}}{e^{-i\alpha}} = e^{2i\alpha}.$$

   Donc $\boxed{\dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} = e^{2i\alpha}}$.

   (b) Montrer que $\forall z\in\mathbb{C}\setminus\{-i\}$, $\forall\theta\in\mathbb{R}\setminus\{\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$, $\dfrac{1+iz}{1-iz} = e^{i\theta} \iff z = \tan\dfrac{\theta}{2}$.

   Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\{-i\}$ et $\theta\in\mathbb{R}\setminus\{\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.

   $$\begin{aligned}\frac{1+iz}{1-iz} = e^{i\theta} &\iff 1+iz = e^{i\theta}(1-iz)\\ &\iff iz(e^{i\theta}+1) = e^{i\theta}-1\\ &\iff z = \frac{e^{i\theta}-1}{i(e^{i\theta}+1)} \quad \text{car} \quad e^{i\theta}\neq -1\end{aligned}$$

   Or $\dfrac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1} = \dfrac{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)} = \dfrac{2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = i\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$.

   Donc $\dfrac{1+iz}{1-iz} = e^{i\theta} \iff z = \tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$.

   Donc $\boxed{\forall z\in\mathbb{C}\setminus\{-i\},\ \forall\theta\in\mathbb{R}\setminus\{\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}, \dfrac{1+iz}{1-iz} = e^{i\theta} \iff z = \tan\dfrac{\theta}{2}}$.

   (c) Déduire des questions précédentes la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(E_\alpha) : \left(\dfrac{1+iz}{1-iz}\right)^3 = \dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$, d'inconnue α.

   Soit $\mathscr{D}$ l'ensemble de définition de E_α et $z\in\mathbb{C}$.

   $z\in\mathscr{D} \iff 1-iz=0 \iff 1-iz\neq 0 \iff iz\neq 1 \iff z\neq -i$.

   Donc $\mathscr{D} = \mathbb{C}\setminus\{-i\}$.

   Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\{-i\}$, $\left(\dfrac{1+iz}{1-iz}\right)^3 = \dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} \iff \left(\dfrac{1+iz}{1-iz}\right)^3 = e^{2i\alpha}$ d'après la question 1)a.

   Les solutions de (E_α) sont donc les nombres complexes z tels que $\dfrac{1+iz}{1-iz}$ est une racine cubique de $e^{2i\alpha}$.

   Donc $(E_\alpha) \iff \dfrac{1+iz}{1-iz} = e^{i\frac{2\alpha+2l\pi}{3}}, l\in[\![0;2]\!]$.

   Soit $l\in[\![0;2]\!]$. On pose $\theta_l = \dfrac{2\alpha+2l\pi}{3}$.

   Vérifions que $\theta_l\in\mathbb{R}\setminus\{\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$ pour utiliser la question 1)b.

   $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ donc $\dfrac{-\pi+2l\pi}{3} < \theta_l < \dfrac{\pi+2l\pi}{3}$.

   - $-\dfrac{\pi}{3} < \theta_0 < \dfrac{\pi}{3}$ donc $\forall k\in\mathbb{Z}, \theta_0\neq\pi+2k\pi$.
   - $\dfrac{\pi}{3} < \theta_1 < \pi$ donc $\forall k\in\mathbb{Z}, \theta_1\neq\pi+2k\pi$.
   - $\pi < \theta_2 < \dfrac{5\pi}{3}$ donc $\forall k\in\mathbb{Z}, \theta_2\neq\pi+2k\pi$.

   Donc $\forall l\in[\![0;2]\!], \theta_l\in\mathbb{R}\setminus\{\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.

   Donc d'après la question 1)b, $(E_\alpha) \iff z = \tan\dfrac{\alpha+l\pi}{3}, l\in[\![0;2]\!]$.

   D'où $\boxed{S = \left\{\tan\dfrac{\alpha}{3};\tan\dfrac{\alpha+\pi}{3};\tan\dfrac{\alpha+2\pi}{3}\right\}}$.

2. Montrer que l'équation $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^3=\frac{1+i}{1-i}$ a pour ensemble de solutions $S=\{-1;2-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\}$.

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^3=\frac{1+i}{1-i} &\iff \left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^3=i\\ &\iff 1+3iz-3z^2-iz^3=i(1-3iz-3z^2+iz^3)\\ &\iff 1-i-3(1-i)z-3(1-i)z^2+(1-i)z^3=0\\ &\iff (1-i)(1-3z-3z^2+z^3)=0\\ &\iff 1-3z-3z^2+z^3=0\\ &\iff (z+1)(z^2-4z+1)=0\\ &\iff z+1=0 \quad \text{ou} \quad z^2-4z+1=0\\ &\iff z=-1 \quad \text{ou} \quad z=2-\sqrt{3} \quad \text{ou} \quad z=2+\sqrt{3}\end{aligned}$$

Donc $\boxed{S=\left\{-1;2-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right\}}$.

3. Déduire la valeur exacte de $\tan\frac{\pi}{12}$.

$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^3=\frac{1+i}{1-i}\iff\left(E_{\frac{\pi}{4}}\right)$ donc

$\left\{-1;2-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right\}=\left\{\tan\frac{\pi}{12};\tan\frac{5\pi}{12};\tan\frac{3\pi}{4}\right\}$.

Or $\tan\frac{3\pi}{4}=-1$ donc $\tan\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$ ou $2+\sqrt{3}$.

De plus, $-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{12}<\frac{5\pi}{2}<\frac{\pi}{2}$ et la fonction tangente est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ donc $\tan\frac{\pi}{12}<\tan\frac{5\pi}{12}$.

Or $2-\sqrt{3}<2+\sqrt{3}$ donc $\boxed{\tan\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}}$.

Exercice 9

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses? Justifier à l'aide d'une démonstration ou d'un contre-exemple (suite définie de manière explicite).

1. Une suite croissante à partir d'un certain rang est minorée.

   Ceci est vrai. Démontrons-le.

   Soit (u_n) une suite réelle. Supposons que (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.

   Alors $\exists n_0\in\mathbb{N}/\forall n\in\mathbb{N},(n\geq n_0\Longrightarrow u_n\geq u_{n_0})$.

   Posons $m=\min\left\{u_0,u_1,u_2,\cdots,u_{n_0-1},u_{n_0}\right\}$. Alors $m\in\mathbb{R}$ et $\forall n\in\mathbb{N},u_n\geq m$. Donc la suite (u_n) est minorée.

   Ainsi $\boxed{\text{une suite croissante à partir d'un certain rang est minorée.}}$

2. Une suite convergente est nécessairement monotone à partir d'un certain rang.

   Ceci est faux. Contre-exemple :

   Considérons la suite (u_n) définie par $\forall n\in\mathbb{N},u_n=\frac{(-1)^n}{n}$.

   Alors (u_n) converge vers 0 (cela se montre avec le théorème des gendarmes!) et pourtant (u_n) n'est pas monotone .

3. Une suite divergeant vers $+\infty$ est nécessairement croissante à partir d'un certain rang.

   Ceci est faux. Contre-exemple :

   Considérons la suite (u_n) définie par $\forall n\in\mathbb{N},u_n=n^2+(-1)^n$.

   Alors (u_n) diverge vers $+\infty$ (cela se montre avec le théorème de divergence par minoration) et pourtant elle n'est pas monotone, donc elle n'est pas croissante à partir d'un certain rang.

4. Si (v_n) est croissante et si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq v_n$, alors (u_n) est croissante.
   Ceci est faux. Contre-exemple :
   Considérons la suite (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{1}{n}$ et (v_n) la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = -\dfrac{1}{n}$.
   Alors (v_n) est croissante et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq v_n$.
   Mais (u_n) est décroissante, donc elle n'est pas croissante.
5. Si $(|u_n|)$ converge, alors (u_n) converge aussi.
   Ceci est faux. Contre-exemple :
   Considérons la suite (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n$.
   Alors $(|u_n|)$ converge vers 1 et pourtant (u_n) diverge et donc ne converge pas.
6. Si $(|u_n|)$ converge vers 0, alors (u_n) converge aussi vers 0.
   Ceci est vrai. Démontrons-le.
   Soit (u_n) une suite. Supposons que $(|u_n|)$ converge vers 0.
   Alors $\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} / (n \geq n_\epsilon \Longrightarrow ||u_n|| \leq \epsilon)$.
   Ceci est équivalent à : $\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} / (n \geq n_\epsilon \Longrightarrow |u_n| \leq \epsilon)$.
   Donc (u_n) converge vers 0.
   Ainsi $\boxed{\text{Si } (|u_n|) \text{ converge vers 0, alors } (u_n) \text{ converge aussi vers 0.}}$

EXERCICE 11

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{5-u_n^2}} \end{cases}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n \leq 2$ puis étudier la convergence de la suite (u_n).
   $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{5-x^2}}$ définie sur $[0;2]$.
   f est dérivable sur $[0;2]$ comme quotient de telles fonctions et $\forall x \in [0;2], f'(x) = \dfrac{5}{(5-x^2)\sqrt{5-x^2}}$.
   $\forall x \in [0;2], f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $[0;2]$.

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n \leq 2$.
(*) Initialisation : $u_0 = 1$, alors $u_0 \in [0;2]$, donc la propriété est vraie au rang 0.
(*) Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que la propriété est vraie au rang n.
Par hypothèse de récurrence, $0 < u_n \leq 2$ et f est strictement croissante sur $[0;2]$ donc $f(0) < f(u_n) \leq f(2)$.
Or $f(0) = 0$ et $f(2) = 2$, donc $0 < u_{n+1} \leq 2$. Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.
(*) Conclusion : La propriété est initialisée au rang 0 et héréditaire donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n \leq 2}$.

Convergence de la suite (u_n).
(1) Sens de variation :
–> f est strictement croissante sur $[0;2]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n \leq 2$, donc la suite (u_n) est monotone.
–> $u_0 = 1$ et $u_1 = f(u_0) = \dfrac{1}{2}$, donc $u_0 \geq u_1$.
Ainsi $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est décroissante}}$.
(2) Convergence :
(u_n) est décroissante et minorée par 0 , donc (u_n) est convergente.
Soit ℓ sa limite.
$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n \leq 2$, alors $0 \leq \ell \leq 2$.
Or f est continue sur $[\,0;2\,]$, donc en ℓ, alors ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$.
$f(\ell) = \ell \Longleftrightarrow \dfrac{\ell}{\sqrt{5-\ell^2}} = \ell \Longleftrightarrow \ell^2 = \ell^2(5-\ell^2) \Longleftrightarrow \ell^2\left(\ell^2 - 4\right) = 0 \Longleftrightarrow$
$\ell = 0$ ou $\ell = -2$ ou $\ell = 2$.
Or $0 \leq \ell \leq 2$, donc $\ell \neq -2$. De plus $(\,u_n\,)$ est décroissante, donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_0$, alors par passage à la limite $\ell \leq 1$.
Donc $f(\ell) = \ell \Longleftrightarrow \ell = 0$. Ainsi $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est converge et a pour limite 0}}$.

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n^2$. Calculer v_0 et expliciter la relation de récurrence vérifiée par la suite (v_n).

$v_0 = u_0^2 = 1$. Donc $\boxed{v_0 = 1}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1}^2 = \dfrac{u_n^2}{5-u_n^2} = \dfrac{v_n}{5-v_n}$.

(v_n) vérifie donc la relation de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \dfrac{v_n}{5-v_n}}$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = \dfrac{1}{v_n}$. Justifier que la suite (w_n) est bien définie et montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = 5w_n - 1$.
Déterminer le terme général de la suite (w_n).

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n = u_n^2$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 0$.

Ainsi $\boxed{(w_n) \text{ est bien définie.}}$

Soit $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = \dfrac{1}{v_{n+1}} = \dfrac{5-v_n}{v_n} = \dfrac{5}{v_n} - 1 = 5w_n - 1$.

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = 5w_n - 1}$ et $w_0 = \dfrac{1}{v_0} = 1$.

(w_n) est une suite arithmético-géométrique.

On résout d'abord l'équation $x = 5x - 1$, on trouve $x = \dfrac{1}{4}$.

Considérons la suite (t_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n = w_n - \dfrac{1}{4}$.

Montrons que (t_n) est une suite géométrique de raison 5.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} = w_{n+1} - \dfrac{1}{4} = 5w_n - 1 - \dfrac{1}{4} = 5w_n - \dfrac{5}{4} = 5\left(w_n - \dfrac{1}{4}\right) = 5t_n$.

La suite (t_n) est donc géométrique de raison 5 et de premier terme $t_0 = w_0 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n = t_0 \times 5^n = \dfrac{3}{4} \times 5^n$.

Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n = w_n - \dfrac{1}{4}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = t_n + \dfrac{1}{4}$.

Ainsi $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \dfrac{3}{4} \times 5^n + \dfrac{1}{4}}$.

(c) Déduire des questions précédentes le terme général de la suite (u_n) et conclure sur la convergence de la suite (u_n).

$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{w_n}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{4}{3 \times 5^n + 1}$.

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n^2$ et $u_n > 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{v_n}$.

Ainsi $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{2}{\sqrt{3 \times 5^n + 1}}}$.

$5 > 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 5^n = +\infty$. De plus, $3 > 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(3 \times 5^n + 1\right) = +\infty$.

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$. Donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est convergente vers } 0}$.

EXERCICE 14

Les questions 1 à 3 sont indépendantes.

1. Soit (x_n) et (y_n) deux suites réelles telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}(x_n - y_n)$ et $y_{n+1} = \dfrac{1}{2}(x_n + y_n)$.
Etudier la convergence de la suite complexe (z_n) où $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n = x_n + iy_n$, puis celle des suites (x_n) et (y_n).

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= x_{n+1} + iy_{n+1} \\ &= \frac{1}{2}(x_n - y_n) + i\frac{1}{2}(x_n + y_n) \\ &= \frac{1}{2}(1+i)x_n + \frac{1}{2}(-1+i)y_n \\ &= \frac{1}{2}(1+i)x_n + \frac{1}{2}i(1+i)y_n \\ &= \frac{1}{2}(1+i)(x_n + iy_n) \\ &= \frac{1}{2}(1+i)z_n \end{aligned}$$

Donc (z_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}(1+i)$.

Or $\left|\dfrac{1}{2}(1+i)\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2} < 1$ donc la suite $(|z_n|)$ converge vers 0.

Ainsi la suite (z_n) converge vers 0 et les suites $(\mathrm{Re}(z_n))$ et $(\mathrm{Im}(z_n))$ convergent également vers 0.

Donc $\boxed{\text{les suites } (z_n), (x_n) \text{ et } (y_n) \text{ convergent vers } 0}$.

2. Etudier la convergence de la suite (z_n) définie par $z_0 \in \mathbb{C}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \dfrac{i}{2} z_n + 1$.

La suite (z_n) est une suite arithmético-géométrique.

$z = \dfrac{i}{2} z + 1 \iff \left(1 - \dfrac{i}{2}\right) z = 1 \iff z = \dfrac{2}{2-i} \iff z = \dfrac{2(2+i)}{5}$.

On considère la suite (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = z_n - \dfrac{2(2+i)}{5}$.

Soit $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \cdots = \dfrac{1}{2} i u_n$ (*Calculs à détailler!*)

Donc la suite (u_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2} i$. Or $\left|\dfrac{1}{2} i\right| = \dfrac{1}{2} < 1$ donc la suite $(|u_n|)$ converge vers 0. Alors la suite (u_n) converge vers 0.

$\forall n \in \mathbb{N}, z_n = u_n + \dfrac{2(2+i)}{5}$ donc $\boxed{\text{la suite } (z_n) \text{ converge vers } \dfrac{2(2+i)}{5}}$.

3. Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n^2 + u_n v_n + v_n^2) = 0$.

En considérant la suite de terme général $z_n = u_n - j v_n$ où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers 0.

Soit (z_n) la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, z_n = u_n - j v_n$ où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}, z_n = u_n - \left(-\dfrac{1}{2} + i \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) v_n = u_n + \dfrac{1}{2} v_n - i \dfrac{\sqrt{3}}{2} v_n$.

Calculons $|z_n|$ afin de faire apparaître u_n^2 et v_n^2.

$|z_n|^2 = \left(u_n + \dfrac{1}{2} v_n\right)^2 + \dfrac{3}{4} v_n^2 = u_n^2 + u_n v_n + v_n^2$.

Or par hypothèse, $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n^2 + u_n v_n + v_n^2) = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} |z_n|^2 = 0$.

Alors la suite $(|z_n|)$ converge vers 0.

Donc la suite (z_n) converge vers 0 et les suites $(\mathrm{Re}(z_n))$ et $(\mathrm{Im}(z_n))$ convergent également vers 0.

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(u_n + \dfrac{1}{2} v_n\right) = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sqrt{3}}{2} v_n = 0$.

Ainsi $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0 \text{ et } \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0}$.