Oscillations mécaniques

Partie I. Oscillation harmonique non amorti

1.1. Bilan des forces : $\left| \begin{array}{l} \vec{P} = m\vec{g} = mg\,\vec{e_x} \\ \vec{F} = -k(\ell-\ell_0)\vec{u_{ext}} = -k(x-\ell_0)\,\vec{e_x} \end{array} \right.$

PFD : $\sum_i \vec{F_{ext}} = m\vec{a}(M) = \vec{P} + \vec{F}$ donc selon $\vec{e_x}$: $m\ddot{x} = mg - k(x-\ell_0)$

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = g + \frac{k\ell_0}{m}}$$

A l'équilibre : $\sum_i \vec{F_{ext}} = \vec{0} = \vec{P} + \vec{F}$ donc selon $\vec{e_x}$: $0 = mg - k(x_e - \ell_0)$

$$\boxed{x_e = \ell_0 + \frac{mg}{k}}$$

1.2. on pose $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ et on remarque que $g + \frac{k\ell_0}{m} = \frac{k}{m}x_e = \omega_0^2 x_e$

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_e}$$

on en déduit : $\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ soit $T_0^2 = \frac{4\pi^2}{\omega_0^2} = 4\pi^2\frac{m}{k}$ soit

$$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

1.3. $x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + x_e$ or $\left\{ \begin{array}{l} x(0) = A + x_e = x_e \text{ soit } A = 0 \\ \dot{x}(0) = \omega_0 B = v_0 \text{ soit } B = \frac{v_0}{\omega_0} \end{array} \right.$

$$\boxed{x(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t + x_e}$$

Partie II. Oscillateur harmonique amorti par frottement fluide

2.1. On en déduit : $\boxed{\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{\rho V}}}$

2.2. Bilan des forces :

$$\vec{P} = m\vec{g} = \rho V g\,\vec{e_x}$$
$$\vec{F} = -k(\ell-\ell_0)\vec{u}_{ext} = -k(x-\ell_0)\vec{e_x}$$
$$\vec{f} = -6\pi\eta R\vec{v} = -6\pi\eta R\dot{x}\,\vec{e_x}$$
$$\vec{F_a} = -\rho_e V_e\vec{g} = -\rho_e V g\,\vec{e_x}$$

A l'équilibre $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} = \vec{P} + \vec{F} + \vec{F_a}$ donc selon $\vec{e_x}$: $0 = \rho V g - k(x_e' - \ell_0) - \rho_e V g$

on en déduit : $$\boxed{\rho_e = \rho - \frac{k(x_e'-\ell_0)}{Vg}}$$

2.3. PFD : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}(M) = \vec{P}+\vec{F}+\vec{F_a}+\vec{f}$ donc selon $\vec{e_x}$:

$$m\ddot{x} = \rho V g - k(x-\ell_0) - \rho_e V g - 6\pi\eta R\dot{x}$$

$$\rho V\ddot{x} + 6\pi\eta R\dot{x} + kx = \rho V g + k\ell_0 - \rho_e V g$$

$$\rho V\ddot{x} + 6\pi\eta R\dot{x} + kx = k x_e$$

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{6\pi\eta R}{\rho V} + \frac{k}{\rho V}x = \frac{k}{\rho V}x_e}$$

2.4. equation caractéristique $\quad r^2 + \frac{6\pi\eta R}{\rho V}r + \frac{k}{\rho V} = 0$

$$\Delta = \left(\frac{6\pi\eta R}{\rho V}\right)^2 - 4\frac{k}{\rho V} = \left(\frac{6\pi\eta R}{\rho V}\right)^2 - 4\omega_1^2 = 4\omega_1^2\left[\left(\frac{6\pi\eta R}{2\rho V\omega_1}\right)^2 - 1\right]$$

régime pseudo-periodique : $\Delta < 0$ soit $\left(\frac{6\pi\eta R}{2\rho V\omega_1}\right)^2 - 1 < 0$ soit

$$(6\pi\eta R)^2 < (2\rho V\omega_1)^2 \quad \text{soit} \quad \omega_1^2 > \frac{(6\pi\eta R)^2}{(2\rho V)^2}$$

$$k > \frac{(6\pi\eta R)^2}{(2\rho V)^2}\times \rho V \quad \text{donc}$$

$$\boxed{k > k_0 = \frac{(6\pi\eta R)^2}{4\rho V}}$$

$$r_{1,2} = \frac{-6\pi\eta R}{2\rho V} \pm i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \frac{-6\pi\eta R}{2\rho V} \pm \omega_1\sqrt{1-\left(\frac{6\pi\eta R}{2\rho V\omega_1}\right)^2}$$

soit la pseudo-pulsation :

$$\omega_2 = \omega_1\sqrt{1-\left(\frac{6\pi\eta R}{2\rho V\omega_1}\right)^2}$$

soit $\boxed{\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{\rho V}(k-k_0)}}$

2.5. $\omega_2^2 = \omega_1^2 - \frac{k_0}{\rho V}$ soit $(6\pi\eta R)^2 = (\omega_1^2-\omega_2^2)4(\rho V)^2$

soit $\boxed{\eta = \frac{\rho V}{3\pi R}\sqrt{\omega_1^2-\omega_2^2}}$

Partie III Petites oscillations d'un bouchon de liège à la surface de l'eau

3.1. Bilan des forces : $\vec{P} = m\vec{g} = -\rho V g\,\vec{e_z}$

$\vec{F_a} = -\rho_{eau} V_{eau}\,\vec{g} = \rho_{eau} V_{eau}\, g\,\vec{e_z}$

A l'équilibre : $\sum_i \vec{F_{ext}} = \vec{0} = \vec{P} + \vec{F_a}$ donc selon $\vec{e_z}$: $0 = -\rho V g + \rho_{eau} V_{eau}\, g$

or $V_{eau} = \frac{V}{2}$ donc $\rho_{eau} = 2\rho$ soit $\boxed{\rho = \frac{\rho_{eau}}{2}}$

3.2. si $z \ll R$ $V_i = \frac{V}{2} - \Delta V$ avec $\Delta V = 2RLz$ donc

$\boxed{V_i = \frac{V}{2} - 2RLz}$ avec $a = 2RL$

3.3. PFD : $\sum_i \vec{F_{ext}} = m\vec{a}(M) = \vec{P} + \vec{F_a}$ donc selon $\vec{e_z}$: $\rho V\ddot{z} = -\rho V g + \rho_{eau} V_i\, g$

$$\rho V\ddot{z} = \rho g(V - 2az - V)$$

$\ddot{z} + \frac{4RLg}{V}z = 0$ soit $\boxed{\ddot{z} + \frac{4g}{\pi R}z = 0}$

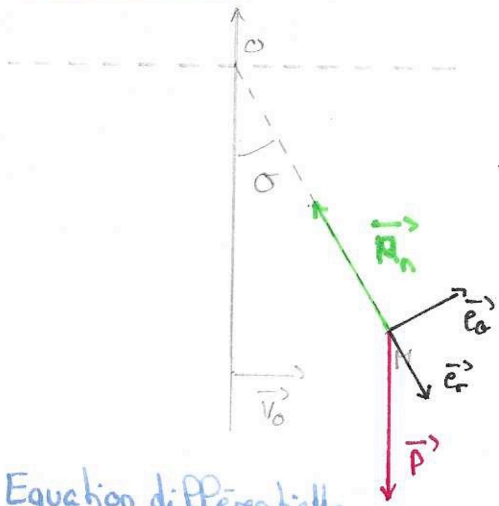
on pose donc $\omega_0^2 = \dfrac{4g}{\pi R}$

3.4. $z(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$ or $\left|\begin{array}{l} z(0) = A = z_0 \\ \dot{z}(0) = \omega_0 B = 0 \end{array}\right.$

$$\boxed{z(t) = z_0 \cos\omega_0 t}$$

Mouvement pendulaire amorti

Bilan des forces



Le point M est soumis à 2 forces :

- La réaction normale du support
  $\vec{R_n} = -R_n \vec{e_r}$
- Le poids
  $\vec{P} = mg\cos\theta\,\vec{e_r} - mg\sin\theta\,\vec{e_\theta}$

Equation différentielle

PFD : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$ avec $\begin{cases} \vec{OM} = R\vec{e_r} \\ \vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e_\theta} \\ \vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e_r} + R\ddot{\theta}\vec{e_\theta} \end{cases}$

Le mvt du point M est selon $\vec{e_\theta}$: $-mg\sin\theta = mR\ddot{\theta}$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\sin\theta = 0}$$

Solution de l'équation différentielle

On sait que $\theta \ll 1$ rad donc $\sin\theta \simeq \theta$ soit $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\theta = 0}$

solution du type : $\theta(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ avec $\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$

CI à $t=0$ $\begin{cases} \theta(t=0) = 0 \\ \dot{\theta}(t=0) = \frac{V_0}{R} \end{cases}$ donc $\begin{cases} A = 0 \\ \omega B = \frac{V_0}{R} \end{cases}$ $\boxed{\theta(t) = \frac{V_0}{\sqrt{Rg}}\sin\sqrt{\frac{g}{R}}\,t}$

Equation différentielle avec frottements

on ajoute la force $\vec{f} = -\lambda\vec{v} = -\lambda R\dot{\theta}\vec{e_\theta}$ donc :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{\lambda}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{R}\sin\theta = 0}$$

Mouvement pseudo-périodique

On sait que $\sigma \ll 1$ rad donc $\sin\sigma \simeq \sigma$ soit $\ddot{\sigma} + \frac{\lambda}{m}\dot{\sigma} + \frac{g}{R}\sigma = 0$

l'équation caractéristique associée est : $r^2 + \frac{\lambda}{m} r + \frac{g}{R} = 0$

$$\Delta = \frac{\lambda^2}{m^2} - 4\frac{g}{R} < 0 \quad \text{donc} \quad \boxed{\lambda < 2m\sqrt{\frac{g}{R}}}$$

Solution de l'équation différentielle avec frottements

$r = \frac{-\lambda}{2m} \pm j\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$ donc $\sigma(t) = e^{-\lambda/2m\,t}\left[A\sin\sqrt{\frac{-\Delta}{2}}\,t + B\sin\sqrt{\frac{-\Delta}{2}}\,t\right]$

CI à $t=0$ $\begin{cases} \sigma(t=0) = 0 \\ \dot{\sigma}(t=0) = \frac{v_0}{R} \end{cases}$ donc $\begin{cases} B = 0 \\ A = \frac{2v_0}{R\sqrt{-\Delta}} \end{cases}$

$$\boxed{\sigma(t) = \frac{2mv_0}{\sqrt{R(4m^2g - R\lambda^2)}}\, e^{-\lambda/2m\,t} \sin\sqrt{\frac{g}{R} - \frac{\lambda^2}{4m^2}}\, t}$$

Décrément logarithmique

on a $\delta = \ln\frac{\sigma(t)}{\sigma(t+T)} = \ln e^{T/\tau}$ avec $\tau = \frac{2m}{\lambda}$ car $\Omega T = 2\pi$ par définition de la pseudo période avec $\Omega = \sqrt{\frac{g}{R} - \frac{\lambda^2}{4m^2}}$

$\delta = \frac{\lambda T}{2m}$ soit $\boxed{\lambda = \frac{2m\delta}{T}}$ or $\begin{cases} T = 4{,}0\ \text{ms} \\ \delta = \ln\frac{0{,}20}{0{,}10} \simeq 0{,}69 \end{cases}$

AN $\lambda = 35\ \text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$

Suivi cinétique de la décoloration de l'érythrosine B

1. $[ClO^-]_0 = 8,0 \times 10^{-2}\ mol.L^{-1}$; $[E127]_0 = 2,8 \times 10^{-6}\ mol.L^{-1}$ $\Big\}$ $[ClO^-]_0 >> [E127]_0$

on utilisera donc la méthode de dégénérescence d'ordre : $[ClO^-]_t \approx [ClO^-]_0$

$$\boxed{v = k_{app}[E127]_t^{\alpha}\ ,\quad k_{app} = k[ClO^-]_0^{\beta}}$$

2. si $\alpha = 1$ alors $v = -\dfrac{d[E127]}{dt} = k_{app}[E127]$

$\dfrac{d[E127]}{[E127]} = -k_{app}\,dt$ soit $\ln\dfrac{[E127]_t}{[E127]_0} = -k_{app}t$

$$\boxed{[E127]_t = [E127]_0\, e^{-k_{app}t}}$$

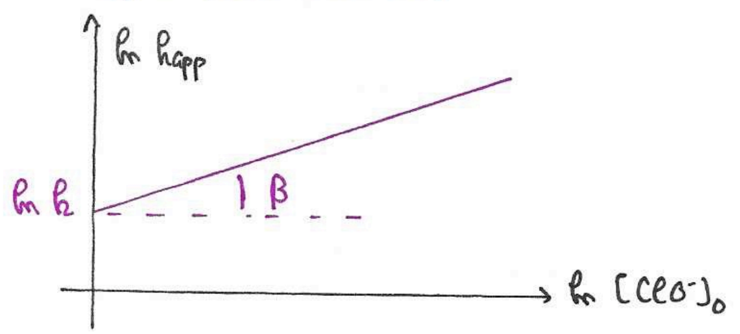
3. si $\alpha = 2$ alors $v = -\dfrac{d[E127]}{dt} = k_{app}[E127]^2$

$\dfrac{d[E127]}{[E127]^2} = -k_{app}\,dt$ soit $\dfrac{1}{[E127]_t} = \dfrac{1}{[E127]_0} + k_{app}t$

$$\boxed{[E127]_t = \frac{[E127]_0}{1 + k_{app}[E127]_0 t}}$$

4. le modèle le plus satisfaisant est celui représentant $\ln\dfrac{[E127]_t}{[E127]_0} = f(t)$ donc $\alpha = 1$

5. $k_{app} = k[ClO^-]_0^{\beta}$ donc $\ln k_{app} = \ln k + \beta \ln[ClO^-]_0$, on trace donc $\ln k_{app} = f(\ln[ClO^-]_0)$



une régression linéaire donne :

$\beta = 1$

$\ln k = -3,6$

donc $k = 2,7 \times 10^{-2}\ L.mol^{-1}.s^{-1}$

rmq : la question 4 nous donne $k_{app} = 2,20 \times 10^{-3}\ s^{-1}$ car $[k_{app}][t] = 1$ (réaction d'ordre 1)