



OBJECTIFS :

- AL 20-1, AL 20-2, AL 20-3 : Montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel, qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel à l'aide de la caractérisation ou d'une famille génératrice.
- AL 20-4, AL 20-5, AL 20-6 : Etudier l'intersection, la somme, la somme directe de deux sous-espaces vectoriels.
- AL 20-7 : Montrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires.
- AL 20-8, AL 20-9, AL 20-10, AL 20-11 : Montrer qu'une famille de vecteurs est liée, libre, génératrice, une base.
- AN 21-1 : Connaître parfaitement les équivalents des fonctions usuelles.
- AN 21-2 : Calculer des équivalents simples de suites ou de fonctions par opérations algébriques, par composition.

Généralités sur les espaces vectoriels

EXERCICE 1

Déterminer si les ensembles suivants, muni des lois usuelles, sont des sous-espaces vectoriels d'espaces vectoriels de référence.

1. $E_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x = y = 2z = 4t\}$
2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y + z \in \mathbb{R}_+\}$
3. $E_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = x^2\}$
4. $E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / xz = 0\}$
5. $E_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + 3z = 1\}$
6. $E_6 = \{(a - b, a + b, a - 3b), (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$
7. $E_7 = \{(a, a, \dots, a) \in \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R}\}$
8. $E_8 = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (u_n) \text{ majorée}\}$

9. $E_9 = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (u_n) \text{ arithmétique}\}$
10. $E_{10} = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 5u_n - 3\}$
11. $E_{11} = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = nu_{n+1} + u_n\}$
12. $E_{12} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / a + b + c + d = 0 \right\}$
13. $E_{13} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / a + b + c = 0 \right\}$
14. $E_{14} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / a = 2d \text{ et } b + c = 0 \right\}$
15. $E_{15} = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c\}$
16. $E_{16} = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c\}$
17. $E_{17} = \{f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}) / f \text{ croissante sur } I\}, I \text{ intervalle de } \mathbb{R}$
18. $E_{18} = \{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / \exists x \in [-1; 1], f(x) = 0\}$

EXERCICE 2

Déterminer si les fonctions f suivantes sont des combinaisons linéaires des fonctions f_1 et f_2 :

1. $f : x \mapsto \sin(2x), f_1 : x \mapsto \sin(x)$ et $f_2 : x \mapsto \cos(x)$.
2. $f : x \mapsto \cos(2x), f_1 : x \mapsto \sin^2(x)$ et $f_2 : x \mapsto \cos^2(x)$.

EXERCICE 3

Les 3 questions sont indépendantes.

1. Dans $\mathbb{R}^3$, montrer que $\text{Vect}((-2, -2, 0), (1, 0, -1), (4, 2, -2)) = \text{Vect}((1, 1, 0), (0, 1, 1))$.
2. Comparer $\text{Vect}(f_1, f_2)$ et $\text{Vect}(f_3, f_4)$ avec $f_1 = ch, f_2 = sh, f_3 = \exp$ et $f_4 = \frac{1}{\exp}$.
3. Montrer que $\text{Vect}\left(\left(x \mapsto \cos(kx)\right)_{0 \leq k \leq 3}\right) = \text{Vect}\left(\left(x \mapsto \cos^k(x)\right)_{0 \leq k \leq 3}\right)$.

EXERCICE 4

Énoncer proprement en termes linéaires le résultat du cours sur les équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 1 et d'ordre 2 à coefficients constants, les solutions sont à valeurs réelles.

EXERCICE 5

Dans chaque cas, montrer que les sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires dans E .

1. $E = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $F = \{f \in E / f(0) = f'(0) = 0\}$ et $G = \{x \mapsto ax + b, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.
2. $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, F est l'ensemble des fonctions constantes sur $[0, 1]$ et $G = \left\{g \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) / \int_0^1 g(t) dt = 0\right\}$.
3. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $F = \{(u_n) \in E / \forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} = 0\}$ et $G = \{(u_n) \in E / \forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} = u_{2n+1}\}$.

EXERCICE 6

Les 3 questions sont indépendantes.

1. Montrer que la famille $((1)_{n \in \mathbb{N}}, (n^2)_{n \in \mathbb{N}}, (2^n)_{n \in \mathbb{N}})$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Les familles suivantes sont-elles libres dans E ?
 - (a) (f_1, f_2, f_3) avec $f_1 : x \mapsto \cos x$, $f_2 : x \mapsto \sin x$ et $f_3 : x \mapsto 1$.
 - (b) (f_1, f_2, f_3) avec $f_1 : x \mapsto \cos^2 x$, $f_2 : x \mapsto \cos(2x)$ et $f_3 : x \mapsto 1$.
 - (c) (f_1, f_2, f_3, f_4) avec $f_1 : x \mapsto \cos x$, $f_2 : x \mapsto x \cos x$, $f_3 : x \mapsto \sin x$ et $f_4 : x \mapsto x \sin x$.
 - (d) $(f_k : x \mapsto e^{kx})_{0 \leq k \leq n}$ avec $n \in \mathbb{N}$.
3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
La famille (I_n, J, J^2) où J est la matrice ne contenant que des 1 est-elle libre dans E ?
(b) Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. La famille (I_2, A, A^2) où $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle libre dans E ?

EXERCICE 7

Les 3 questions sont indépendantes.

1. Déterminer une base des ensembles suivants.
 - (a) $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0 \text{ et } 2x - y - z = 0\}$
 - (b) $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - 2z = 0\}$
2. Déterminer une base de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ et de $\mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ puis de $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ et de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
3. Déterminer une base du sous-espace vectoriel F de $\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ engendré par (f_1, f_2, f_3, f_4) avec $f_1 : x \mapsto \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, $f_2 : x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, $f_3 : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $f_4 : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

EXERCICE 8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On considère $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / AM = MA\}$.

1. Montrer que F est un sous espace vectoriel de E .
2. On pose $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer une base de F .

EXERCICE 9

Soit E l'ensemble des fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles.

On admet que E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Soit $F = \{f \in E / \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = (1 + x^2)f(x)\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .
Pour la suite de l'exercice, on considère une fonction f de F ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(x) \int_0^x \frac{1}{f^2(t)} dt$ appartient à F .

3. L'objectif de cette question est de montrer que $F = Vect(f, g)$.

(a) Montrer que $\forall (u, v) \in F^2, u'v - uv'$ est une fonction constante.

(b) Soit $h \in F$. En déduire qu'il existe un réel λ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x \left(\frac{h'f - hf'}{f^2} \right)(t) dt = \lambda \int_0^x \frac{1}{f^2(t)} dt.$$

(c) Conclure.

4. En déduire une base de F .

Relations de comparaison

EXERCICE 10

1. Démontrer que $\ln(x+1) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(x)$. A-t-on $e^{x+1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^x$?

2. Démontrer que $\ln(2x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(x)$. A-t-on $e^{2x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^x$?

EXERCICE 11

Déterminer un équivalent le plus simple possible pour chacune des fonctions f suivantes au voisinage de a puis en déduire la limite de f en a :

1. $f : x \mapsto x + 1 + \ln x, a = 0$ et $a = +\infty$.

2. $f : x \mapsto ch(\sqrt{x}), a = +\infty$.

3. $f : x \mapsto \frac{(\sin x) \ln(1 + 2x^2)}{x \tan(3x)}, a = 0$.

4. $f : x \mapsto \ln(\sin x), a = 0$.

EXERCICE 12

Simplifier les expressions suivantes :

1. $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x - 2x^2 + o(x^2) + x^3 + o(x^4)$.

2. $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 1 + x - 2x^2 + o(x^2) + x^3 + o(x^4)$.

3. $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) + 3 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$.

4. $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} (1-x)^3 + x^2(1-x)^2 - 2x(x + o(x^3)) + o(x^3)$.

EXERCICE 13

Soit f et g deux fonctions telles que $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 2 - x + x^2 + o(x^2)$ et

$$g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + x^3 + o(x^3).$$

Pour tout x au voisinage de 0, écrire les expressions suivantes sous la forme $h(x) + o(x^n)$ avec $n \in \mathbb{N}$ et n le plus grand possible.

1. $f(x) + g(x)$

2. $f(x)g(x)$

3. $f(x^2) + g(x)$

4. $f(x) - \frac{g(x)}{x}$

EXERCICE 14

Classer les suites suivantes, données par leur terme général, par ordre de négligeabilité :

1. $n, n^2, n \ln n, \sqrt{n} \ln n$ et $\frac{n^2}{\ln n}$.

2. $\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{n}{e^n}, \frac{n^2}{e^n}$ et $\frac{1}{ne^n}$.

EXERCICE 15

Quels sont les équivalents corrects parmi les propositions suivantes ?

- | | |
|-------------------------------------|-----------------------------|
| 1. $n^2 \sim n^2 + n$ | 4. $\exp(n) \sim \exp(2n)$ |
| 2. $\ln(n) \sim \ln(10^6 n)$ | 5. $\ln(n) \sim \ln(n+1)$. |
| 3. $\exp(n) \sim \exp(n + 10^{-6})$ | |

EXERCICE 16

Déterminer un équivalent simple des suites (u_n) suivantes puis leur limite :

- | | |
|---|--|
| 1. $u_n = \frac{3n^4 - 2n^2 + 1}{2n^3 + 1}$ | 5. $u_n = \ln(n^2 - 3n + 2)$ |
| 2. $u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$ | 6. $u_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$ |
| 3. $u_n = \frac{n^3 - \sqrt{n^2 + 1}}{5(\ln n)^3 - 2n^2}$ | 7. $u_n = \frac{n! + e^n}{2^n + 3^n}$ |
| 4. $u_n = \sqrt{\ln(n+1) - \ln n}$ | 8. $u_n = \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) \right)^{\ln n} - 1$ |

EXERCICE 17

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et (E_n) l'équation $x + \ln x = n$ d'inconnue x , avec $x \in]0; +\infty[$.

- Montrer que l'équation (E_n) admet une unique solution dans $]0; +\infty[$.
On note u_n cette solution.
- Montrer que la suite (u_n) est croissante.
En déduire qu'elle diverge vers $+\infty$.
- Déterminer un équivalent simple de la suite (u_n) .

EXERCICE 18

Soit $n \in \mathbb{N}$ et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = x^3 + nx + n$.

- (a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
On note u_n cette solution.
(b) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq u_n \leq 0$.
- Etudier la monotonie de la suite (u_n) puis montrer que (u_n) converge vers -1 .
- Montrer que $u_n = -1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

EXERCICE 19

On considère la suite (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n dx$.

- (a) Justifier l'existence de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(b) Montrer que $\forall x \in [1; e], 0 \leq \ln x \leq \frac{x}{e}$ puis que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq \frac{e^3}{n+3}$.
En déduire la limite de la suite (u_n) .
- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} u_n$.
En déduire un équivalent simple de la suite (u_n) .

EXERCICE 20

On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Montrer que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.
- Montrer que $n-1 \leq u_n \leq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis en déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
- En déduire que $u_n = n - \frac{1}{2} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.