

 OBJECTIFS :

- AN 22-1 et AN 22-2 : Etudier la continuité d'une fonction en un point ou sur un intervalle, prolonger une fonction par continuité.
- AN 22-3 : Savoir appliquer le TVI.
- AN 22-4 : Savoir utiliser la caractérisation séquentielle d'une limite ou de la continuité en un point.
- AL 23-1 : Déterminer si une famille de polynômes est libre.
- AL 23-2 : Déterminer si un ensemble de polynômes est un sev.
- AL 23-3 : Déterminer le degré et le coefficient dominant d'un polynôme.
- AL 23-4 : Déterminer un ensemble de polynômes à partir de propriétés données.
- AL 23-5 : Effectuer une division euclidienne de polynômes.
- AL 23-6 : Déterminer le reste d'une division euclidienne de polynômes.
- AL 23-7 : Déterminer l'ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme.
- AL 23-8 : Savoir factoriser un polynôme dans $\mathbb{R}[X]$ ou dans $\mathbb{C}[X]$.
- AL 23-9 : Utiliser un polynôme annulateur d'une matrice pour montrer son inversibilité.
- AL 24-1 et AL 24-2 : Déterminer la dimension d'un espace vectoriel, déterminer le rang d'une famille de vecteurs.
- AL 24-3 : Déterminer une base d'un espace vectoriel.
- AL 24-4 : Montrer que des sous-espaces vectoriels sont supplémentaires en dimension finie.
- AN 24-5 : Savoir exploiter un développement limité pour étudier des propriétés locales d'une fonction.

EXERCICE 1

Les questions sont indépendantes.

1. Démontrer que la fonction $g : x \mapsto \sin(\cos x)$, définie sur $\mathbb{R}$, n'admet pas de limite en $+\infty$.
2. La fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = x - \lfloor x \rfloor$ admet-elle une limite en $+\infty$?
3. Soit f une fonction périodique définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est constante sur $\mathbb{R}$.
4. Soit f une application définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, continue en 0, telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x)$. Montrer que f est constante sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 2

Les questions sont indépendantes.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_-$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_-, f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2|x|}{x} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

f est-elle continue en 0?

2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et f la fonction définie sur $[0; 1]$ par

$$\forall x \in [0; 1], f(x) = \begin{cases} a & \text{si } x = 0 \\ x + \frac{x \ln x}{1-x} & \text{si } 0 < x < 1 \\ b & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Déterminer les réels a et b tels que f soit continue sur $[0; 1]$.

3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 3

Les questions sont indépendantes.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, f(x) = \frac{1+x}{x^3+1}$.
Calculer $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$. Que peut-on en déduire?
2. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2-2x-3}{\sqrt{x+1}}$.
Etudier les éventuels prolongements par continuité.
3. Etudier la continuité de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par

$$\forall x \in]0; +\infty[, f(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{\ln x - 1}\right) & \text{si } x \neq e \\ 0 & \text{si } x = e \end{cases}$$
 - (a) f est-elle continue en e ?
 - (b) prolongeable par continuité en 0 ?
4. Préciser l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$.
Déterminer les points en lesquels elle est prolongeable par continuité.
5. Soit $f : x \mapsto \frac{x^2 \ln x}{\sin x}$.
 - (a) Déterminer l'ensemble de définition de f .
 - (b) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 mais pas ailleurs.

EXERCICE 4

Soit f la fonction définie sur $] -\infty; \frac{1}{2}[$ par :

$$\forall x \in] -\infty; \frac{1}{2}[, f(x) = \begin{cases} \frac{(2x-1)\ln(1-2x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue en 0 ?
2. Etudier la continuité de la fonction f sur $] -\infty; 0[$.
3. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en $\frac{1}{2}$?

EXERCICE 5

Soit f la fonction définie sur $] -1; 0[\cup]0; +\infty[$ par

$$\forall x \in] -1; 0[\cup]0; +\infty[, f(x) = \frac{x^2 + \ln(1+x)}{x^2 + x} \text{ et } \mathcal{C} \text{ sa courbe représentative.}$$

1. Etudier la continuité de f sur $] -1; 0[$. On admet que f est continue sur $]0; +\infty[$.
2. f est-elle prolongeable par continuité en -1 ? f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
3. Etudier les branches infinies de $\mathcal{C}$.

EXERCICE 6

Les questions sont indépendantes.

1. Soit f une fonction définie, continue et positive sur $[0; +\infty[$ telle que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = l \text{ avec } l < 1.$$
 Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution dans $[0; +\infty[$.
2. Soit f une fonction de $[0; 1]$ dans $[0; 1]$, continue. Montrer que f admet un point fixe dans $[0; 1]$.
3. Soit f une fonction définie et continue sur $[0; 1]$ telle que $f(0) = f(1)$.
 Montrer que l'équation $f\left(x + \frac{1}{2}\right) = f(x)$ admet une solution dans $[0; 1]$.

EXERCICE 7

Déterminer si les ensembles suivants, muni des lois usuelles, sont des sous-espaces vectoriels d'espaces vectoriels de référence.

1. $E_1 = \{P \in \mathbb{R}[X] / P(1) = 0\}$
2. $E_2 = \{P \in \mathbb{R}[X] / P(0) = 1\}$
3. $E_3 = \{aX^3 + bX + c, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$
4. $E_4 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] / P(-1) = 0\}$
5. $E_5 = \{P \in \mathbb{R}[X] / P(X+1) = 2P(X) \text{ et } P(3) = 0\}$

EXERCICE 8

Soit $E = \mathbb{C}[X]$. Les familles suivantes sont-elles libres dans E ?

1. $\mathcal{B}_1 = (X^2, (X-i)^2, (X+i)^2)$
2. $\mathcal{B}_2 = (X^2, X(X-1), X(X-2))$

EXERCICE 9

Soit P et Q les polynômes définis par $P = 2X^3 + 5X - 1$ et $Q = -X^2 + 3X$. Déterminer chacun des polynômes suivants : $P + Q$, PQ , $P \times P$ et $Q \circ P$.

EXERCICE 10

Les 3 questions sont indépendantes.

1. Déterminer le degré et le coefficient dominant du polynôme P défini par $P = (1 + iX)^n - (1 - iX)^n$, pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Déterminer le degré et le coefficient dominant du polynôme P défini par $P = (X^2 + 1)^n - 2X^{2n} + (X^2 - 1)^n$, pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P = (1 + X)(1 + X^2)(1 + X^4) \cdots (1 + X^{2^n})$.

- (a) Déterminer le degré de P .
- (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, développer le polynôme $(1 - X)P$ et en déduire l'expression développée de P .

EXERCICE 11

Les 2 questions sont indépendantes.

1. Déterminer $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $P = X^4 + \lambda X^3 + \mu X^2 + 12X + 4$ soit le carré d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Dans chacun des cas suivants, déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que :
 - (a) $(X^2 + 1)P'' - 6P = 0$
 - (b) $P \circ P = P$
 - (c) $P(X^2) = (X^2 + 1)P$

EXERCICE 12

Les 4 questions sont indépendantes.

1. Effectuer la division euclidienne de :
 - (a) $X^4 + 5X^3 + 12X^2 + 19X - 7$ par $X^2 + 3X - 1$
 - (b) $X^4 - 9X^2 - 3$ par $X^2 - X - 7$
 - (c) $3X^5 + 4X^2 + 1$ par $X^2 + 2X + 3$
2. (a) Déterminer le reste de la division euclidienne de $X^n + 2X + 1$ par $X^2 + X$, pour $n \in \mathbb{N}$.
 (b) Déterminer le reste de la division euclidienne de $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ par $(X-1)^2$, pour $n \geq 1$.
3. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $X^2 + aX + 1$ divise $X^4 + bX^2 + 1$.

EXERCICE 13

Soit $n \in \mathbb{N}$ et P le polynôme défini par $P = (X+1)^n + (X-1)^n - 2X^n$.

- Déterminer le degré et le coefficient dominant du polynôme P .
On notera a_k , $k \in \mathbb{N}$, les coefficients de P .
On suppose désormais que $n \geq 2$.
- Déterminer les valeurs de n pour lesquelles 0 est racine de P et déterminer son ordre de multiplicité.
- Déterminer le reste R de la division euclidienne de P par $X^2 - X$.

EXERCICE 14

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

- (a) Déterminer un polynôme P annulateur de A de degré 2.
(b) En déduire que A est inversible et calculer son inverse.
- Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par P , pour $n \geq 2$.
- En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 15

Soit $F = \{X^6 + aX^5 + bX^4 + cX^3 + bX^2 + aX + 1, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$.

Le but de cet exercice est de déterminer des propriétés sur les racines d'un polynôme de F .

- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $P_\alpha = X^3 + \alpha X^2 + \alpha X + 1$.
 - Montrer que -1 est racine de P_α et déterminer, en fonction de α , la multiplicité de la racine -1 de P_α .
 - Déterminer le nombre de racines réelles de P_α en fonction de α .
- Soit $Q \in F$.
 - Montrer que z est racine de Q ssi $\bar{z}$ est racine de Q .
 - Justifier que les racines de Q sont non nulles.

(c) Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Montrer que z est racine de Q ssi $z + \frac{1}{z}$ est racine du polynôme $P = X^3 + aX^2 + (b-3)X + c - 2a$.

3. *Application* : Soit $A = X^6 + X^5 + 4X^4 + 3X^3 + 4X^2 + X + 1$.

- Déterminer les racines complexes de A .
- En déduire la factorisation de A dans $\mathbb{R}[X]$.

EXERCICE 16

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.

On considère le polynôme $P_n = (X+1)^n - X^n - 1$.

- Déterminer le degré de P_n ainsi que son coefficient dominant.
- Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Donner deux caractérisations de la divisibilité de P_n par $(X - \alpha)$.
 - Montrer que X divise P_n .
 - Déterminer les valeurs de n pour lesquelles P_n est divisible par $X + 1$.
 - Le polynôme P_n peut-il être divisible par $(X + 1)^2$?
- On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
 - Calculer $1 + j + j^2$. Préciser j^{6k} et $(j^2)^{6k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
 - Montrer que s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 6k - 1$ alors j est une racine de P_n .
On montrerait de même que j^2 est racine de P_n .
- Déduire des questions précédentes une factorisation de P_5 en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Espaces vectoriels de dimension finie

EXERCICE 17

Déterminer la dimension des espaces vectoriels suivants :

1. $E_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - 3y + 2t = 0\}$
2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 2y = 3z\}$
3. $E_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y = 0, y + z = 0, z + t = 0, t + x = 0\}$
4. $E_4 = \{P \in \mathbb{R}_4[X] / P(1) = 0\}$
5. $E_5 = \{P \in \mathbb{R}[X] / P^{(3)} = 0_{\mathbb{R}[X]}\}$
6. E_6 est l'ensemble des suites arithmétiques.
7. $E_7 = \{f \in \mathcal{F}(]0; +\infty[, \mathbb{R}) / \forall x \in]0; +\infty[, xf'(x) - f(x) = 0\}$
8. $E_8 = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f'' - 4f' - 5f = 0\}$
9. $E_9 = \left\{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / a = 2b = 3c\right\}$
10. $E_{10} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / AM = 0\}$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

EXERCICE 18

Soit $F = \{(a + b, a - b, a + 2b, b), (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$,
 $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / -2x + y + z + t = 0, x - z + t = 0 \text{ et } x + z = 0\}$ et
 $H = \text{Vect}(u, v)$ avec $u = (2, 0, 3, 1)$ et $v = (1, 3, 0, -1)$.

1. (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et déterminer sa dimension.
(b) Déterminer un système d'équations cartésiennes de F .
2. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et déterminer sa dimension.
3. (a) Déterminer une base de $F \cap G$ puis de $F + G$.
(b) Conclure sur F et G .
4. Montrer que $H = F$.

EXERCICE 19

Montrer, dans chacun des cas, que les sous-espaces vectoriels F et G de E sont supplémentaires dans E :

1. $E = \mathbb{R}^3, F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y = z\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y + z\}$.
2. $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), F$ est l'ensemble des matrices diagonales de E et
 $G = \text{Vect}(A, B)$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
3. $E = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - u_{n+1} - 2u_n = 0\}$,
 $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} + u_n = 0\}$ et
 $G = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - 2u_n = 0\}$.
4. $E = \mathbb{R}_3[X], F = \{P \in E / P(1) = P'(1) = P''(1) = 0\}$ et $G = \{P \in E / P(2) = 0\}$.

EXERCICE 20

Déterminer un supplémentaire dans $\mathbb{R}^3$ de chacun des sous-espaces vectoriels suivants :

1. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y + 3z = 0\}$
2. $F = \text{Vect}(u, v, w)$ avec $u = (-1, 1, 0), v = (2, 0, 1)$ et $w = (1, 1, 1)$.
3. $F = \text{Vect}(u)$ avec $u = (-1, 1, 0)$.

EXERCICE 21

Les deux questions sont indépendantes.

1. Soit $F = \left\{P \in \mathbb{R}_2[X] / \int_0^1 P(t) dt = 0\right\}$.
(a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$, dont on précisera une base et la dimension.
(b) Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour tout réel a , on pose $F_a = \{P \in E / P(a) = 0\}$.
(a) On suppose que $n = 1$.
Montrer que $F_1 + F_2 = E$. F_1 et F_2 sont-ils supplémentaires dans E ?
(b) Mêmes questions en supposant $n = 2$.

EXERCICE 22

Les trois questions sont indépendantes.

- Déterminer le rang des familles suivantes :
 - (u, v, w, t) avec $u = (1, 1, 0, 1)$, $v = (1, -1, 1, 0)$, $w = (2, 0, 1, 1)$ et $t = (0, -2, 1, -1)$.
 - (u, v, w, t) avec $u = (1, 1, 0, 1)$, $v = (1, 1, 1, 0)$, $w = (1, 0, 1, 1)$ et $t = (0, 1, 1, 1)$.
- Déterminer le rang de la famille $((\alpha, 1, 1), (1, \alpha, 1), (-1, -1, \alpha))$ suivant les valeurs de $\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$.
- Soit $(f, g) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{R}})^2$ avec $f: x \mapsto x + 1$ et $g: x \mapsto x^2$.
Déterminer le rang de la famille $(f, g, f \circ f, f \circ g, g \circ f, g \circ g)$.

EXERCICE 23

Soit $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / 2a + d = 0 \right\}$ et $G = Vect\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right)$

deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et l'ensemble

$H = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / \forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), AM = MA\}$.

- Déterminer une base et la dimension de F .
 - Déterminer une base et la dimension de G .
 - Déterminer $F \cap G$ puis sa dimension. En déduire $F + G$.
- Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 - F et H sont-ils supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

EXERCICE 24

Soit $F = \{P \in \mathbb{R}[X] / P(-1) = P(1) = P'(-1) = P'(1) = 0\}$.

- Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $P \in F$ ssi $(X^2 - 1)^2$ divise P .
- Soit $n \in \mathbb{N}$ et $F_n = F \cap \mathbb{R}_n[X]$.
 - Justifier que F_n est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ de dimension finie.
 - On suppose que $0 \leq n \leq 3$. Déterminer la dimension de F_n .
 - On suppose que $n \geq 4$. On pose $L_i = X^i(X^2 - 1)^2$ pour tout $i \in \llbracket 0; n-4 \rrbracket$.
Montrer que la famille $(L_i)_{0 \leq i \leq n-4}$ est une base de F_n .
En déduire la dimension de F_n .