Généralités sur les espaces vectoriels.

Remarque : Pas de notion de dimension dans ce chapitre, cela sera vu plus tard dans le semestre.

- Définition d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, exemples de référence de $\mathbb{R}-$espaces vectoriels et de $\mathbb{C}-$espaces vectoriels, sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel (définition et caractérisation), combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs, sous-espace engendré par une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, intersection de deux sous-espaces vectoriels.
- Définition et propriété de la somme de deux sous-espaces vectoriels, définition et caractérisation de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.
- Définition et exemple d'une famille libre, d'une famille liée.

  Définition d'une base, des bases canoniques des espaces vectoriels de référence, caractérisations d'une base, coordonnées d'un vecteur dans une base, matrice d'un vecteur dans une base, matrice d'une famille de vecteurs dans une base.

Relations de comparaison.

- Relation de domination ($f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$), relation de négligeabilité ($f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$) : définition, opérations, lien entre les deux relations, croissances comparées.
- Relation d'équivalence ($f(x) \underset{x\to a}{\sim} O(g(x))$) : définition, obtention d'un équivalent pour une fonction continue en a et telle que $f(a) \neq 0$ (idem pour une fonction dérivable en a telle que $f'(a) \neq 0$), équivalent d'une fonction polynomiale au voisinage de 0 et de $+\infty$, $f \underset{a}{\sim} g \Longleftrightarrow f \underset{a}{=} g + o(g)$, opérations sur les équivalents, limite et signe, principe de substitution, ($f \underset{a}{=} o(g)$ et $g \underset{a}{\sim} h$) $\Longrightarrow f \underset{a}{=} o(h)$, équivalents usuels au voisinage de 0, théorème des gendarmes pour les équivalents.
- Relations de comparaison pour les suites au voisinage de $+\infty$: même étude que pour les fonctions.

Limites et continuité.

- Limite d'une fonction en un point, en l'infini, unicité de la limite, limite à droite et limite à gauche en un point, caractérisation de la limite en un point à l'aide des limites à droite et à gauche.
- Limites usuelles, opérations sur les limites, caractérisation de la limite d'une fonction en un point par les suites, limite d'une composée, passage à la limite dans les inégalités larges, théorèmes de comparaison et de la limite monotone.
- Continuité en un point, continuité à droite et à gauche, caractérisation de la continuité en un point à l'aide de la continuité à gauche et à droite, prolongement par continuité, caractérisation de la continuité d'une fonction en un point par les suites.
- Continuité sur un intervalle, opérations sur les fonctions continues, théorème des valeurs intermédiaires et son corollaire, image d'un intervalle par une fonction continue, continuité d'une fonction sur un segment (théorème des bornes atteintes).

Polynômes.

- Définition d'un polynôme, égalité de deux polynômes, définition de $\mathbb{K}_n[X]$, somme de deux polynômes et degré, multiplication d'un polynôme par un scalaire, produit de deux polynômes, formule du binôme de Newton, identité $P^n - Q^n$, composée de deux polynômes, définition du degré et propriétés, liberté d'une famille de polynômes non nuls de degrés distincts, fonction polynomiale associée à un polynôme.
- Arithmétique des polynômes : divisibilité, polynômes associés, division euclidienne.
- Dérivation dans $\mathbb{K}[X]$: polynôme dérivé, lien avec le degré, opérations sur les dérivées, dérivées successives, formule de Leibniz, formule de Taylor, base de $\mathbb{K}_n[X]$.
- Définition d'une racine d'un polynôme, lien avec la divisibilité, majoration du nombre de racines par le degré d'un polynôme, multiplicité d'une racine (définition et caractérisation par la divisibilité et les polynômes dérivés), polynôme scindé (définition et caractérisation avec la somme des ordres de multiplicité des racines), relation entre les coefficients et la somme des racines d'un polynôme, relation entre les coefficients et le produit des racines d'un polynôme.

Un énoncé au choix à demander :

- ☐ Définition d'un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
- ☐ Définition d'une combinaison linéaire de n vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
- ☐ Définition de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.
- ☐ Caractérisation de deux sous-espaces supplémentaires.
- ☐ Définition d'une famille libre.
- ☐ Définition d'une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
- ☐ Donner la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
- ☐ Définitions des relations de négligeabilité et d'équivalence pour des fonctions.
- ☐ Enoncer les 10 équivalents des fonctions usuelles au voisinage de 0.
- ☐ Définition de la limite finie d'une fonction en un point.
- ☐ Définition de la limite finie d'une fonction en l'infini ($+\infty$) + interprétation graphique.
- ☐ Définition de la limite infinie ($+\infty$) d'une fonction en un point + interprétation graphique.
- ☐ Définition de la limite infinie ($-\infty$) d'une fonction en l'infini ($+\infty$).
- ☐ Caractérisation de la limite en un point à l'aide des limites à droite et à gauche (cas où f est définie en a et cas où f n'est pas définie en a).
- ☐ Caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction.
- ☐ Théorème des gendarmes (d'encadrement) pour les fonctions.
- ☐ Théorème de divergence par minoration ou par majoration pour les fonctions.
- ☐ Définition de la continuité d'une fonction en un point.
- ☐ Caractérisation de la continuité en un point (lien avec continuité à gauche et à droite).
- ☐ Caractérisation séquentielle de la continuité d'une fonction en un point.
- ☐ Théorème des valeurs intermédiaires et son corollaire.
- ☐ Définition du degré d'un polynôme.
- ☐ Degré d'un produit de deux polynômes, de la composée $P \circ Q$ avec Q polynôme non constant.
- ☐ Définition de la fonction polynomiale associée à un polynôme.
- ☐ Théorème de la division euclidienne.
- ☐ Formule de Leibniz pour les polynômes.
- ☐ Formule de Taylor pour les polynômes.
- ☐ Définition et caractérisation d'une racine d'un polynôme.
- ☐ Définition et caractérisation de la multiplicité d'une racine.

Démonstrations :

- ☐ Caractérisation séquentielle de la continuité d'une fonction en un point.
- ☐ Image d'un intervalle par une fonction continue.
- ☐ Caractérisation d'une racine d'un polynôme.

Exercices traités dans au moins l'une des deux classes :

TD 9 : exercice 1, exercice 2, exercice 3 questions 1 et 2, exercice 4, exercice 5 questions 1 et 2, exercice 6 sauf question 2.d), exercice 7, exercice 8, exercice 10, exercice 11, exercice 12, exercice 13, exercice 14, exercice 15, exercice 16, exercice 18, exercice 20.

TD 10 : exercice 1 questions 1 et 2, exercice 2, exercice 3, exercice 4, exercice 5, exercice 6 questions 1 et 2, exercice 7, exercice 8, exercice 9, exercice 10 questions 1 et 2, exercice 11 question 2.(a) et 2.(c), exercice 12 question 2.

Exercices traités en autonomie :

Cahier de vacances en ligne sur le site.

TD 9 : exercice 3 question 3, exercice 6 question 2.(d), exercice 17, exercice 19.

TD 10 : exercice 6 question 3, exercice 11 question 1, exercice 12 question 1.

Note aux colleurs : Dans la classe B, a été fait en classe un exercice similaire à l'exercice 14 du TD 10.