

Relations de comparaison.

- Relation de domination ($f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} O(g(x))$), relation de négligeabilité ($f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$) : définition, opérations, lien entre les deux relations, croissances comparées.
- Relation d'équivalence ($f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} O(g(x))$) : définition, obtention d'un équivalent pour une fonction continue en a et telle que $f(a) \neq 0$ (idem pour une fonction dérivable en a telle que $f'(a) \neq 0$), équivalent d'une fonction polynomiale au voisinage de 0 et de $+\infty$, $f \underset{a}{\sim} g \iff f \underset{a}{=} g + o(g)$, opérations sur les équivalents, limite et signe, principe de substitution, ($f \underset{a}{=} o(g)$ et $g \underset{a}{\sim} h \implies f \underset{a}{=} o(h)$), équivalents usuels au voisinage de 0, théorème des gendarmes pour les équivalents.
- Relations de comparaison pour les suites au voisinage de $+\infty$: même étude que pour les fonctions.

Limites et continuité.

- Limite d'une fonction en un point, en l'infini, unicité de la limite, limite à droite et limite à gauche en un point, caractérisation de la limite en un point à l'aide des limites à droite et à gauche.
- Limites usuelles, opérations sur les limites, caractérisation de la limite d'une fonction en un point par les suites, limite d'une composée, passage à la limite dans les inégalités larges, théorèmes de comparaison et de la limite monotone.
- Continuité en un point, continuité à droite et à gauche, caractérisation de la continuité en un point à l'aide de la continuité à gauche et à droite, prolongement par continuité, caractérisation de la continuité d'une fonction en un point par les suites.
- Continuité sur un intervalle, opérations sur les fonctions continues, théorème des valeurs intermédiaires et son corollaire, image d'un intervalle par une fonction continue, continuité d'une fonction sur un segment (théorème des bornes atteintes).

Polynômes.

- Définition d'un polynôme, égalité de deux polynômes, définition de $\mathbb{K}_n[X]$, somme de deux polynômes et degré, multiplication d'un polynôme par un scalaire, produit de deux polynômes, formule du binôme de Newton, identité $P^n - Q^n$, composée de deux polynômes, définition du degré et propriétés, liberté d'une famille de polynômes non nuls de degrés distincts, fonction polynomiale associée à un polynôme.
- Arithmétique des polynômes : divisibilité, polynômes associés, division euclidienne.
- Dérivation dans $\mathbb{K}[X]$: polynôme dérivé, lien avec le degré, opérations sur les dérivées, dérivées successives, formule de Leibniz, formule de Taylor, base de $\mathbb{K}_n[X]$.
- Définition d'une racine d'un polynôme, lien avec la divisibilité, majoration du nombre de racines par le degré d'un polynôme, multiplicité d'une racine (définition et caractérisation par la divisibilité et les polynômes dérivés), polynôme scindé (définition et caractérisation avec la somme des ordres de multiplicité des racines), relation entre les coefficients et la somme des racines d'un polynôme, relation entre les coefficients et le produit des racines d'un polynôme.

Espaces vectoriels de dimension finie.

- Définition d'un espace vectoriel de dimension finie, théorème de la base incomplète et de la base extraite, définition de la dimension, exemples de référence.
- Nombre de vecteurs d'une famille libre, d'une famille génératrice d'un espace vectoriel de dimension finie, famille libre d'un espace vectoriel de dimension finie égale au cardinal de cette famille et famille génératrice d'un espace vectoriel de dimension finie égale au cardinal de cette famille.

- Dimension d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie, caractérisation de l'égalité de deux espaces vectoriels avec la dimension, définitions d'une droite vectorielle, de plan vectoriel.
Formule de Grassmann, existence d'un supplémentaire en dimension finie, caractérisations de la supplémentarité à l'aide des dimensions.
- Définition et calcul du rang, lien avec les familles libres/génératrices.

Un énoncé au choix à demander :

- ☐ Définitions des relations de négligeabilité et d'équivalence pour des fonctions.
- ☐ Enoncer les 10 équivalents des fonctions usuelles au voisinage de 0.
- ☐ Définition de la limite finie d'une fonction en un point.
- ☐ Définition de la limite finie d'une fonction en l'infini $(+\infty)$ + interprétation graphique.
- ☐ Définition de la limite infinie $(+\infty)$ d'une fonction en un point + interprétation graphique.
- ☐ Définition de la limite infinie $(-\infty)$ d'une fonction en l'infini $(+\infty)$.
- ☐ Caractérisation de la limite en un point à l'aide des limites à droite et à gauche (cas où f est définie en a et cas où f n'est pas définie en a).
- ☐ Caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction.
- ☐ Théorème des gendarmes (d'encadrement) pour les fonctions.
- ☐ Théorème de divergence par minoration ou par majoration pour les fonctions.
- ☐ Définition de la continuité d'une fonction en un point.
- ☐ Caractérisation de la continuité en un point (lien avec continuité à gauche et à droite).
- ☐ Caractérisation séquentielle de la continuité d'une fonction en un point.
- ☐ Théorème des valeurs intermédiaires et son corollaire.
- ☐ Définition du degré d'un polynôme.
- ☐ Degré d'un produit de deux polynômes, de la composée $P \circ Q$ avec Q polynôme non constant.
- ☐ Définition de la fonction polynomiale associée à un polynôme.
- ☐ Théorème de la division euclidienne.
- ☐ Formule de Taylor pour les polynômes.
- ☐ Définition et caractérisation d'une racine d'un polynôme.
- ☐ Définition et caractérisation de la multiplicité d'une racine.
- ☐ Définition et caractérisation d'un polynôme scindé.
- ☐ Relation entre les coefficients et la somme des racines d'un polynôme, relation entre les coefficients et produit des racines.
- ☐ Définition d'un polynôme irréductible.
- ☐ Donner les polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.
- ☐ Définition d'un espace vectoriel de dimension finie.
- ☐ Définition de la dimension d'un espace vectoriel de dimension finie.
- ☐ Dimension de $\mathbb{K}_n[X] (n \in \mathbb{N})$ et de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) ((n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2)$.
- ☐ Formule de Grassmann.
- ☐ Caractérisation de deux sous-espaces supplémentaires en dimension finie.
- ☐ Définition du rang d'une famille finie de vecteurs d'un espace vectoriel.

Démonstrations :

- ☐ Image d'un intervalle par une fonction continue.
- ☐ Caractérisation d'une racine d'un polynôme.
- ☐ Existence d'un supplémentaire en dimension finie.

Exercices traités dans au moins l'une des deux classes :

TD 9 : exercice 10, exercice 11, exercice 12, exercice 13, exercice 14, exercice 15, exercice 16, exercice 18, exercice 20.

TD 10 : exercice 1 questions 1 et 2, exercice 2, exercice 3, exercice 4, exercice 5, exercice 6 questions 1 et 2, exercice 7, exercice 8, exercice 9, exercice 10 questions 1 et 2, exercice 11 question 2.(a) et 2.(c), exercice 12 question 2, exercice 13, exercice 14, exercice 16, exercice 17, exercice 19, exercice 20 questions 1 et 3.

Exercices traités en autonomie :

Cahier de vacances en ligne sur le site.

TD 9 : exercice 17, exercice 19.

TD 10 : exercice 6 question 3, exercice 11 question 1, exercice 12 question 1, exercice 15, exercice 18, exercice 20 question 2, exercice 24.