TD 9 : Généralités sur les espaces vectoriels.

Eléments de correction

EXERCICE 4

2. Montrons que $\text{Vect}\left((x \mapsto \cos(kx))_{0\le k\le 3}\right) = \text{Vect}\left(\left(x \mapsto \cos^k x\right)_{0\le k\le 3}\right)$.

Posons $F = \text{Vect}\left((x \mapsto \cos(kx))_{0\le k\le 3}\right)$ et $G = \text{Vect}\left(\left(x \mapsto \cos^k x\right)_{0\le k\le 3}\right)$.

Alors $F = \text{Vect}(x \mapsto 1, x \mapsto \cos x, x \mapsto \cos 2x, x \mapsto \cos 3x)$ et
$G = \text{Vect}\left(x \mapsto 1, x \mapsto \cos x, x \mapsto \cos^2 x, x \mapsto \cos^3 x\right)$.

- Montrons que $F \subset G$.
  Les fonctions $f : x \mapsto 1$ et $g : x \mapsto \cos x$ appartiennent à G.
  Soit $x \in \mathbb{R}, \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, donc la fonction $x \mapsto \cos 2x$ appartient à G.
  De plus, $\cos 3x = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = \left(2\cos^2 x - 1\right)\cos x - 2\cos x \sin^2 x = 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x\left(1-\cos^2 x\right) = 4\cos^3 x - 3\cos x$.
  Donc la fonction $h : x \mapsto \cos 3x$ appartient à G.
  G étant un sous-espace vectoriel, toute combinaison linéaire des vecteurs f, g et h appartient à G donc $F \subset G$.
- Montrons que $G \subset F$.
  Les fonctions $f : x \mapsto 1$ et $g : x \mapsto \cos x$ appartiennent à F.
  Soit $x \in \mathbb{R}, \cos^2 x = \dfrac{\cos 2x + 1}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos 2x$, donc la fonction $k : x \mapsto \cos^2 x$ appartient à F.
  De plus, $\cos^3 x = \dfrac{\cos 3x + 3\cos x}{4} = \dfrac{3}{4}\cos x + \dfrac{1}{4}\cos 3x$ donc la fonction $\ell : x \mapsto \cos^3 x$ appartient à F.
  G étant un sous-espace vectoriel, toute combinaison linéaire des fonctions f, g, k et ℓ appartient à F donc $G \subset F$.
  Donc $\text{Vect}\left(x \mapsto 1, x \mapsto \cos x, x \mapsto \cos^2 x, x \mapsto \cos^3 x\right) \subset F$, d'où $G \subset F$.

Conclusion : $F = G$ donc $\boxed{\text{Vect}\left((x \mapsto \cos(kx))_{0\le k\le 3}\right) = \text{Vect}\left(\left(x \mapsto \cos^k x\right)_{0\le k\le 3}\right)}$.

EXERCICE 6

2.(d) Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $n \in \mathbb{N}$.
La famille $\left(f_k : x \mapsto e^{kx}\right)_{0\le k\le n}$ est-elle libre dans E ?

Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda_0 + \lambda_1 e^x + \cdots + \lambda_n e^{nx} = 0$.
A-t-on $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n$?
Si $n \ge 1$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty}(\lambda_0 + \lambda_1 e^x + \cdots + \lambda_n e^{nx}) = \lambda_0$. Par unicité de la limite, $\lambda_0 = 0$.
Ainsi :
$\forall x \in \mathbb{R}, \lambda_0 + \lambda_1 e^x + \cdots + \lambda_n e^{nx} = 0 \iff \forall x \in \mathbb{R}, \lambda_1 + \lambda_2 e^x + \cdots + \lambda_n e^{(n-1)x} = 0$.
Si $n \ge 2$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty}(\lambda_1 + \lambda_2 e^x + \cdots + \lambda_n e^{(n-1)x}) = \lambda_1$.
Par unicité de la limite, $\lambda_1 = 0$.
On réitère le procédé et on obtient successivement $\lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.
Donc $\boxed{\text{la famille } \left(f_k : x \mapsto e^{kx}\right)_{0\le k\le n} \text{ est libre dans } E}$.

EXERCICE 9

Soit E l'ensemble des fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles.
On admet que E est un $\mathbb{R}-$ espace vectoriel.
Soit $F = \left\{f \in E / \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = (1+x^2)f(x)\right\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
   $F \subset E$.
   Soit f la fonction nulle sur $\mathbb{R}$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ et $f''(x) = 0$.
   Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = (1+x^2)f(x)$. D'où $0_E \in F$.
   Soit $(f, g) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   $(\lambda f + g)''(x) = \lambda f''(x) + g''(x) = \lambda(1+x^2)f(x) + (1+x^2)g(x)$ car $(f, g) \in F^2$.
   Donc $(\lambda f + g)''(x) = (1+x^2)(\lambda f + g)(x)$.
   Ainsi $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$.
   Pour la suite de l'exercice, on considère une fonction f de F ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(x)\displaystyle\int_0^x \frac{1}{f^2(t)}\,dt$ appartient à F.
   $f \in F$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors elle est continue sur $\mathbb{R}$.
   f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc $t \mapsto \dfrac{1}{f^2(t)}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Alors $x \mapsto \int_0^x \frac{1}{f^2(t)} dt$ est l'unique primitive de la fonction $t \mapsto \frac{1}{f^2(t)}$ s'annulant en 0.

Donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \left(\int_0^x \frac{1}{f^2(t)} dt\right)'(x) = \frac{1}{f^2(x)}$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = f'(x) \int_0^x \frac{1}{f^2(t)} dt + \frac{1}{f(x)}$.

$f \in F$ donc f' est dérivable sur $\mathbb{R}$.

g' est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$g"(x) = f"(x) \int_0^x \frac{1}{f^2(t)} dt + f'(x) \times \frac{1}{f^2(x)} - \frac{f'(x)}{f^2(x)} = f"(x) \int_0^x \frac{1}{f^2(t)} dt.$

De plus, $f"(x) = (1+x^2)f(x)$ donc

$g"(x) = (1+x^2)f(x) \int_0^x \frac{1}{f^2(t)} dt = (1+x^2)g(x)$.

Ainsi $\boxed{g \in F}$.

3. L'objectif de cette question est de montrer que $F = Vect(f, g)$.

   (a) Montrer que $\forall (u, v) \in F^2, u'v - uv'$ est une fonction constante.

   Soit $(u, v) \in F^2$.

   Alors u et v sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$. Donc $u'v - uv'$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$.

   $(u'v - uv')'(x) = u"(x)v(x) + u'(x)v'(x) - u'(x)v'(x) - u(x)v"(x) = \cdots = 0.$

   Donc $\boxed{\forall (u, v) \in F^2, u'v - uv' \text{ est une fonction constante.}}$.

   (b) Soit $h \in F$. En déduire qu'il existe un réel λ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x \left(\frac{h'f - hf'}{f^2}\right)(t) dt = \lambda \int_0^x \frac{1}{f^2(t)} dt.$

   $h \in F$ et $f \in F$ donc on peut appliquer le résultat précédent avec $u = h$ et $v = f$.

   Ainsi $\exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall t \in \mathbb{R}, (h'f - hf')(t) = \lambda$.

   Donc $\forall t \in \mathbb{R}, \left(\frac{h'f - hf'}{f^2}\right)(t) = \frac{\lambda}{f^2(t)}$.

   Ainsi en intégrant, $\boxed{\exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x \left(\frac{h'f - hf'}{f^2}\right)(t) dt = \lambda \int_0^x \frac{1}{f^2(t)} dt.}$.

   (c) Conclure.

   Soit $x \in \mathbb{R}$, $\int_0^x \left(\frac{h'f - hf'}{f^2}\right)(t) dt = \left[\left(\frac{h}{f}\right)(t)\right]_0^x = \frac{h(x)}{f(x)} - \frac{h(0)}{f(0)}$.

   Donc $\int_0^x \left(\frac{h'f - hf'}{f^2}\right)(t) dt = \lambda \int_0^x \frac{1}{f^2(t)} dt \iff \frac{h(x)}{f(x)} - \frac{h(0)}{f(0)} = \lambda \int_0^x \frac{1}{f^2(t)} dt$.

   Alors $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \lambda f(x) \int_0^x \frac{1}{f^2(t)} dt + \frac{h(0)}{f(0)} f(x) = \lambda g(x) + \mu f(x)$

   avec $\mu = \frac{h(0)}{f(0)} \in \mathbb{R}$.

   Ainsi h est combinaison linéaire de f et de g donc $h \in Vect(f, g)$.

   D'où $F \subset Vect(f, g)$.

   De plus, $(f, g) \in F^2$ et F est un $\mathbb{R}$−espace vectoriel donc $Vect(f, g) \subset F$.

   Donc $\boxed{F = Vect(f, g)}$.

4. En déduire une base de F.

   (f, g) est une famille génératrice de F. Montrons que cette famille est libre.

   Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, af(x) + bg(x) = 0$.

   Pour $x = 0$, on obtient $af(0) = 0$.

   Or f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc $f(0) \neq 0$. D'où $a = 0$.

   Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, bg(x) = 0$.

   Pour $x = 1$, on obtient $bg(1) = 0$.

   Or $\forall t \in \mathbb{R}, \frac{1}{f^2(t)} > 0$ et $0 < 1$ d'où $\int_0^1 \frac{1}{f^2(t)} dt > 0$.

   De plus, $f(1) \neq 0$ donc $g(1) \neq 0$.

   D'où $b = 0$.

   Ainsi la famille (f, g) est libre dans F.

   Donc $\boxed{(f, g) \text{ est une base de } F}$.

EXERCICE 16

8. Équivalent simple de $u_n = \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\ln n} - 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = e^{\ln n \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)} - 1$.
$\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \ln\left(1 + \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)\right)$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1 = 0$ et $\ln(1+X) \underset{X\to 0}{\sim} X$ donc $\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim \cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1$
De plus, $1 - \cos X \underset{X\to 0}{\sim} \frac{X^2}{2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \sim -\frac{1}{2n^2}$.
Par produit, $\ln n \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim -\frac{\ln n}{2n^2}$.
Par croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{\ln n}{2n^2} = 0$ et donc
$\lim\limits_{n\to+\infty} \ln n \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 0$.
Or $e^X - 1 \underset{X\to 0}{\sim} X$ donc $u_n \sim \ln n \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ et par transitivité,
$\boxed{u_n \sim -\frac{\ln n}{2n^2}}$.

EXERCICE 17

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et (E_n) l'équation $x + \ln x = n$ d'inconnue x, avec $x \in]0;+\infty[$.

1. Montrer que l'équation (E_n) admet une unique solution dans $]0;+\infty[$.
   On note u_n cette solution.
   Soit $f : x \mapsto x + \ln x$ la fonction définie sur $]0;+\infty[$.
   f est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$ comme somme de telles fonctions.
   Alors f réalise une bijection de $]0;+\infty[$ dans $f(]0;+\infty[)$.
   $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, donc f est bijective de $]0;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
   Or $n \in \mathbb{R}$, donc $\boxed{\text{l'équation } (E_n) \text{ admet une unique solution dans }]0;+\infty[}$.

2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   En déduire qu'elle diverge vers $+\infty$.
   $f(u_n) = n$, alors $u_n = f^{-1}(n)$ avec f^{-1} la fonction réciproque de la fonction f.
   f étant strictement croissante sur $]0;+\infty[$, f^{-1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   $n < n+1$, alors $f^{-1}(n) < f^{-1}(n+1)$, donc $u_n < u_{n+1}$.
   Alors la suite $\boxed{(u_n) \text{ est croissante}}$.
   $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} f^{-1}(n) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.

3. Déterminer un équivalent simple de la suite (u_n).
   (u_n) diverge vers $+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln u_n}{u_n} = 0$. Ainsi $\ln u_n = o(u_n)$.
   Or, par définition de la suite (u_n), $u_n + \ln u_n = n$ donc $u_n + o(u_n) = n$.
   Ainsi $\boxed{u_n \sim n}$.

EXERCICE 19

On considère la suite (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n \, dx$.

1. (a) Justifier l'existence de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction ln est continue sur $[1;e]$, à valeurs dans $[0;1]$ et la fonction $t \mapsto t^n$ est continue sur $[0;1]$. Donc par composée, la fonction $x \mapsto (\ln x)^n$ est continue sur $[1;e]$. De plus, la fonction carré est continue sur $[1;e]$ donc par produit, la fonction $x \mapsto x^2(\ln x)^n$ est continue sur $[1;e]$.
   Donc $\boxed{\text{l'intégrale } u_n \text{ existe pour tout } n \in \mathbb{N}}$.

   (b) Montrer que $\forall x \in [1;e], 0 \le \ln x \le \frac{x}{e}$ puis que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \le u_n \le \frac{e^3}{n+3}$.
   En déduire la limite de la suite (u_n).
   $\forall x \in [1;e], \ln x \ge 0$.
   La fonction $x \mapsto \ln x - \frac{x}{e}$ est croissante sur $[1;e]$ (à montrer!).
   De plus, $f(e) = 0$ donc f est négative sur $[1;e]$.

Ainsi $\boxed{\forall x \in [1;e], 0 \leq \ln x \leq \frac{x}{e}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [1;e], 0 \leq \ln x \leq \frac{x}{e}$ donc $0 \leq (\ln x)^n \leq \frac{x^n}{e^n}$.

Or $x^2 \geq 0$ donc $0 \leq x^2(\ln x)^n \leq \frac{x^{n+2}}{e^n}$.

Par croissance de l'intégrale, puisque $1 < e$, alors $0 \leq u_n \leq \int_1^e \frac{x^{n+2}}{e^n}\,dx$.

Donc $0 \leq u_n \leq \frac{1}{(n+3)e^n}(e^{n+3}-1)$. Or $e^{n+3}-1 \leq e^{n+3}$ donc

$0 \leq u_n \leq \frac{e^{n+3}}{(n+3)e^n}$. Ainsi $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq \frac{e^3}{n+3}}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e^3}{n+3} = 0$ donc d'après le théorème d'encadrement,

$\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3}u_n$.

   Soit $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \int_1^e x^2(\ln x)^{n+1}\,dx$.

   On pose $\begin{cases} u'(x) = x^2 \\ v(x) = (\ln x)^{n+1} \end{cases}$. Alors $\begin{cases} u(x) = \frac{x^3}{3} \\ v(x) = (n+1)\frac{(\ln x)^n}{x} \end{cases}$.

   u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1;e]$.

   Par intégration par parties, $u_{n+1} = \left[\frac{x}{3}(\ln x)^{n+1}\right]_1^e - \frac{n+1}{3}\int_1^e x^2(\ln x)^n\,dx = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3}u_n$.

   Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3}u_n}$.

   En déduire un équivalent simple de la suite (u_n).

   Soit $n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{e^3}{n+1} - \frac{3}{n+1}u_{n+1}$.

   Or $\frac{3}{n+1}u_{n+1} = o\left(\frac{e^3}{n+1}\right)$ (vérifiez-le!) donc $u_n = \frac{e^3}{n+1} + o\left(\frac{e^3}{n+1}\right)$.

   Ainsi $\boxed{u_n \sim \frac{e^3}{n+1}}$.