

EXERCICE 1

3. Soit f une fonction périodique définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est constante sur $\mathbb{R}$.

Soit T la période de la fonction f . Alors $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, f(x + nT) = f(x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Supposons $T > 0$ et considérons la suite (u_n) définie par

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = x + nT$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ car $T > 0$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$. Donc d'après la caractérisation séquentielle de la limite, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = l$.

Or $\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n) = f(x)$ donc par unicité de la limite, $f(x) = l$.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = l$. Donc f est constante sur $\mathbb{R}$.

Si $T < 0$, on considère la suite (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = x - nT$ et on a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

On peut donc se ramener au cas précédent et conclure que

f est constante sur $\mathbb{R}$.

4. Soit f une application définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, continue en 0, telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x)$. Montrer que f est constante sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$f(x) = f\left(2 \times \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(2 \times \frac{x}{4}\right) = f\left(\frac{x}{4}\right) = \dots = f\left(\frac{x}{2^n}\right) \text{ avec } n \in \mathbb{N}.$$

On montre donc par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

Soit (u_n) la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{x}{2^n}$.

Alors (u_n) converge vers 0. Or f est continue en 0 donc $(f(u_n))$ converge vers

$f(0)$ d'après la caractérisation séquentielle de la continuité.

Or $\forall n \in \mathbb{N}, f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x)$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(x)$.

Par unicité de la limite, $f(x) = f(0)$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(0)$.

Ainsi f est constante sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 6

3. Soit f une fonction définie et continue sur $[0; 1]$ telle que $f(0) = f(1)$.

Montrer que l'équation $f\left(x + \frac{1}{2}\right) = f(x)$ admet une solution dans $[0; 1]$.

On définit la fonction g sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ par $g(x) = f\left(x + \frac{1}{2}\right) - f(x)$.

Comme f est continue sur $[0, 1]$, les fonctions $x \mapsto f(x)$ et $x \mapsto f\left(x + \frac{1}{2}\right)$ sont continues sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Donc la fonction g est continue sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

De plus, $g(0) = f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0)$ et $g\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right)$.

Or, $f(0) = f(1)$ donc $g(0) + g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

Alors $g(0)$ et $g\left(\frac{1}{2}\right)$ sont de signes opposés.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $c \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ tel que $g(c) = 0$.

Donc il existe un réel $c \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ tel que $f\left(c + \frac{1}{2}\right) = f(c)$.

Ainsi l'équation $f\left(x + \frac{1}{2}\right) = f(x)$ admet une solution dans $[0, 1]$.

EXERCICE 10

3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P = (1 + X)(1 + X^2)(1 + X^4) \cdots (1 + X^{2^n})$.

(a) Déterminer le degré de P .

$$\begin{aligned} \deg(P) &= \deg(1 + X) + \deg(1 + X^2) + \deg(1 + X^4) + \dots + \deg(1 + X^{2^n}) \\ &= 1 + 2 + 4 + \dots + 2^n \\ &= \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} \\ &= 2^{n+1} - 1 \end{aligned}$$

Donc $\deg(P) = 2^{n+1} - 1$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, développer le polynôme $(1 - X)P(X)$ et en déduire l'expression développée de P .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}(1 - X)P &= (1 - X)(1 + X)(1 + X^2)(1 + X^4) \cdots (1 + X^{2^n}) \\ &= (1 - X^2)(1 + X^2)(1 + X^4) \cdots (1 + X^{2^n}) \\ &= (1 - X^4)(1 + X^4) \cdots (1 + X^{2^n}) \\ &= \cdots \\ &= (1 - X^{2^n})(1 + X^{2^n}) \\ &= 1 - X^{2^{n+1}}\end{aligned}$$

Donc $(1 - X)P = 1 - X^{2^{n+1}}$.

1 est une racine de $1 - X^{2^{n+1}}$ donc $1 - X^{2^{n+1}}$ est divisible par $X - 1$ et donc par $1 - X$.

Ainsi $1 - X^{2^{n+1}} = (1 - X)(1 + X + X^2 + \cdots + X^{2^{n+1}-1})$.

Donc $P = 1 + X + X^2 + \cdots + X^{2^{n+1}-1}$.

EXERCICE 11

1. Déterminer $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $P = X^4 + \lambda X^3 + \mu X^2 + 12X + 4$ soit le carré d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse : On suppose qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = Q^2$.

Alors $\deg(P) = 2\deg(Q)$. Donc $\deg(Q) = 2$.

Il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $Q = aX^2 + bX + c$.

$$\begin{aligned}P = Q^2 &\iff X^4 + \lambda X^3 + \mu X^2 + 12X + 4 = (aX^2 + bX + c)^2 \\ &\iff X^4 + \lambda X^3 + \mu X^2 + 12X + 4 = a^2 X^4 + b^2 X^2 + c^2 + 2abX^3 + 2acX^2 + 2bcX\end{aligned}$$

Par identification, on obtient :
$$\begin{cases} 1 = a^2 \\ \lambda = 2ab \\ \mu = b^2 + 2ac \\ 12 = 2bc \\ 4 = c^2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \pm 1 \\ \lambda = 2ab \\ \mu = b^2 + 2ac \\ 12 = 2bc \\ c = \pm 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ \lambda = 6 \\ \mu = 13 \\ b = 3 \\ c = 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = 1 \\ \lambda = -6 \\ \mu = 5 \\ b = -3 \\ c = -2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = -1 \\ \lambda = -6 \\ \mu = 5 \\ b = 3 \\ c = 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = -1 \\ \lambda = 6 \\ \mu = 13 \\ b = -3 \\ c = -2 \end{cases}$$

Donc $(\lambda, \mu) = (6, 13)$ ou $(\lambda, \mu) = (-6, 5)$.

Synthèse :

- Si $(\lambda, \mu) = (6, 13)$ alors $P = X^4 + 6X^3 + 13X^2 + 12X + 4 = (X^2 + 3X + 2)^2$ donc P est bien le carré d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.
- Si $(\lambda, \mu) = (-6, 5)$ alors $P = X^4 - 6X^3 + 5X^2 + 12X + 4 = (X^2 - 3X - 2)^2$ donc P est bien le carré d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

Ainsi P est le carré d'un polynôme ssi $(\lambda, \mu) = (6, 13)$ ou $(\lambda, \mu) = (-6, 5)$.

EXERCICE 12

Les 3 questions sont indépendantes.

1. Effectuer la division euclidienne de :

(a) $X^4 + 5X^3 + 12X^2 + 19X - 7$ par $X^2 + 3X - 1$

$$X^4 + 5X^3 + 12X^2 + 19X - 7 = (X^2 + 3X - 1)(X^2 + 2X + 7)$$

(b) $X^4 - 9X^2 - 3$ par $X^2 - X - 7$

$$X^4 - 9X^2 - 3 = (X^2 - X - 7)(X^2 + X - 1) + 6X - 10$$

(c) $3X^5 + 4X^2 + 1$ par $X^2 + 2X + 3$

$$3X^5 + 4X^2 + 1 = (X^2 + 2X + 3)(3X^3 - 6X^2 + 3X + 16) - 41X - 47$$

2. (a) Déterminer le reste de la division euclidienne de $X^n + 2X + 1$ par $X^2 + X$, pour $n \in \mathbb{N}$. *Faite en classe.*

(b) Déterminer le reste de la division euclidienne de $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ par $(X - 1)^2$, pour $n \geq 1$. *Faite en classe.*

3. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $X^2 + aX + 1$ divise $X^4 + bX^2 + 1$.

Effectuons la division euclidienne de $X^4 + bX^2 + 1$ par $X^2 + aX + 1$.

$$\text{Alors } X^4 + bX^2 + 1 = (X^2 + aX + 1)(X^2 - aX + b - 1 + a^2) +$$

$$(2 - b - a^2)(aX + 1).$$

Ainsi $(X^2 + aX + 1) | (X^4 + bX^2 + 1) \iff (2 - b - a^2)(aX + 1) = 0 \iff 2 - b - a^2 = 0 \iff b = 2 - a^2$.

Donc $(X^2 + aX + 1)$ divise $(X^4 + bX^2 + 1)$ ssi $(a, b) \in \{(a, 2 - a^2), a \in \mathbb{R}\}$.

EXERCICE 15

Soit $F = \{X^6 + aX^5 + bX^4 + cX^3 + bX^2 + aX + 1, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$.

Le but de cet exercice est de déterminer des propriétés sur les racines d'un polynôme de F .

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $P_\alpha = X^3 + \alpha X^2 + \alpha X + 1$.

(a) Montrer que -1 est racine de P_α et déterminer, en fonction de α , la multiplicité de la racine -1 de P_α .

$P_\alpha(-1) = -1 + \alpha - \alpha + 1 = 0$ donc -1 est racine de P_α .

$P'_\alpha = 3X^2 + 2\alpha X + \alpha$, alors $P'_\alpha(-1) = 3 - \alpha$. Donc si $\alpha \neq 3$, -1 est racine simple de P_α .

Si $\alpha = 3$, -1 est au moins racine double de P_α .

$P''_3 = 6X + 6$, alors $P''_3(-1) = 0$.

Ainsi -1 est racine simple de P_α si $\alpha \neq 3$ et -1 est racine triple de P_α

si $\alpha = 3$.

(b) Déterminer le nombre de racines réelles de P_α en fonction de α .

Si $\alpha = 3$, $P_3 = (X + 1)^3$.

Si $\alpha \neq 3$, $P_\alpha = (X + 1)(X^2 + (\alpha - 1)X + 1)$.

Le discriminant de $X^2 + (\alpha - 1)X + 1$ est $\Delta = (\alpha - 1)^2 - 4 = (\alpha - 3)(\alpha + 1)$.

Si $\alpha \in]-1; 3[$, alors $\Delta < 0$, donc $X^2 + (\alpha - 1)X + 1$ n'admet pas de racine réelle.

Si $\alpha = -1$, alors $\Delta = 0$, donc $X^2 + (\alpha - 1)X + 1$ admet une racine double réelle.

Si $\alpha \in]-\infty; -1[\cup]3; +\infty[$, alors $\Delta > 0$, donc $X^2 + (\alpha - 1)X + 1$ admet deux racines réelles distinctes.

Ainsi si $\alpha \in]-1; 3[$, P_α admet une racine réelle, si $\alpha = -1$, P_α admet

deux racines réelles et si $\alpha \in]-\infty; -1[\cup]3; +\infty[$, P_α admet trois racines réelles.

2. Soit $Q \in F$.

(a) Montrer que z est racine de Q ssi $\bar{z}$ est racine de Q .

$Q \in F$, alors il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $Q = X^6 + aX^5 + bX^4 + cX^3 + bX^2 + aX + 1$.

z est racine de $Q \iff Q(z) = 0$

$$\iff z^6 + az^5 + bz^4 + cz^3 + bz^2 + az + 1 = 0$$

$$\iff \overline{z^6 + az^5 + bz^4 + cz^3 + bz^2 + az + 1} = 0$$

$$\iff \bar{z}^6 + a\bar{z}^5 + b\bar{z}^4 + c\bar{z}^3 + b\bar{z}^2 + a\bar{z} + 1 = 0$$

$$\iff Q(\bar{z}) = 0$$

$$\iff \bar{z} \text{ racine de } Q$$

Donc z est racine de Q si et seulement si $\bar{z}$ est racine de Q .

(b) Justifier que les racines de Q sont non nulles.

$Q(0) = 1 \neq 0$, donc 0 n'est pas racine de Q .

Ainsi les racines de Q sont non nulles.

(c) Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Montrer que z est racine de Q ssi $z + \frac{1}{z}$ est racine du

polynôme $P = X^3 + aX^2 + (b - 3)X + c - 2a$.

z est racine de $Q \iff Q(z) = 0$

$$\iff z^6 + az^5 + bz^4 + cz^3 + bz^2 + az + 1 = 0$$

$$\iff z^3 + az^2 + bz + c + b\frac{1}{z} + a\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} = 0 \quad (\text{car } z \neq 0)$$

$$\iff \left(z^3 + \frac{1}{z^3}\right) + a\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + b\left(z + \frac{1}{z}\right) + c = 0$$

$$\iff \left(z + \frac{1}{z}\right)^3 - 3\left(z + \frac{1}{z}\right) + a\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2a + b\left(z + \frac{1}{z}\right) + c = 0$$

$$\iff z + \frac{1}{z} \text{ est racine de } P = X^3 + aX^2 + (b - 3)X + c - 2a$$

Donc z est racine de Q ssi $z + \frac{1}{z}$ est racine de $P = X^3 + aX^2 + (b - 3)X + c - 2a$.

3. **Application** : Soit $A = X^6 + X^5 + 4X^4 + 3X^3 + 4X^2 + X + 1$.

(a) **Déterminer les racines complexes de A .**

D'après la question 3.c, z est racine de A si et seulement si $z + \frac{1}{z}$ est racine du polynôme $P = X^3 + X^2 + X + 1$.

Or $P = X^3 + X^2 + X + 1 = P_\alpha$ avec $\alpha = 1$.

D'après la question 2.b, P_1 admet une racine réelle -1 et deux racines complexes.

$P_1 = (X + 1)(X^2 + 1)$, les racines complexes de P_1 sont donc i et $-i$.

Alors z est racine de A si et seulement si $z + \frac{1}{z} = -1$ ou $z + \frac{1}{z} = i$ ou

$$z + \frac{1}{z} = -i.$$

$$z + \frac{1}{z} = -1 \iff z^2 + z + 1 = 0.$$

$$\Delta = -3, \text{ donc } z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \text{ et } \bar{z}_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \text{ sont racines de } A.$$

$$z + \frac{1}{z} = i \iff z^2 - iz + 1 = 0.$$

$$\Delta = -5, \text{ donc } z_2 = \frac{1 + \sqrt{5}i}{2} \text{ et } z_3 = \frac{1 - \sqrt{5}i}{2} \text{ sont racines de } A.$$

De plus, d'après la question 3.a, z est racine de A si et seulement si $\bar{z}$ est racine de A , alors $\bar{z}_2$ et $\bar{z}_3$ sont racines de A .

$\deg A = 6$, alors A admet au plus 6 racines.

$$\text{Donc les racines de } A \text{ sont } z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \bar{z}_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}, z_2 = \frac{1 + \sqrt{5}i}{2},$$

$$\bar{z}_2 = -\frac{1 + \sqrt{5}i}{2}, z_3 = \frac{1 - \sqrt{5}i}{2} \text{ et } \bar{z}_3 = \frac{-1 + \sqrt{5}i}{2}.$$

(b) **En déduire la factorisation de A dans $\mathbb{R}[X]$.**

$$\begin{aligned} A &= (X - z_1)(X - \bar{z}_1)(X - z_2)(X - \bar{z}_2)(X - z_3)(X - \bar{z}_3) \\ &= (X^2 - 2\operatorname{Re}(z_1)X + |z_1|^2)(X^2 - 2\operatorname{Re}(z_2)X + |z_2|^2)(X^2 - 2\operatorname{Re}(z_3)X + |z_3|^2) \\ &= (X^2 + X + 1)\left(X^2 - X + \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2\right)\left(X^2 + X + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^2\right) \end{aligned}$$

$$\text{Alors } A = (X^2 + X + 1)\left(X^2 - X + \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)\left(X^2 + X + \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right).$$

EXERCICE 18

1. (a) **Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.**

$$F \subset \mathbb{R}^4.$$

$$F = \{(a + b, a - b, a + 2b, b), (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \operatorname{Vect}((1, 1, 1, 0), (1, -1, 2, 1)).$$

$$\text{Donc } F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^4.$$

(b) **Base de F .**

$((1, 1, 1, 0), (1, -1, 2, 1))$ est une famille libre (vecteurs non colinéaires) et génératrice de F . Donc $((1, 1, 1, 0), (1, -1, 2, 1))$ est une base de F .

(c) **Système d'équations cartésiennes de F .**

$$\text{Soit } (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4.$$

$$\begin{aligned} (x, y, z, t) \in F &\iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 / \begin{cases} x = a + b \\ y = a - b \\ z = a + 2b \\ t = b \end{cases} \\ &\iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 / \begin{cases} x = z - t \\ y = z - 3t \\ a = z - 2t \\ b = t \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x - z + t = 0 \\ y - z + 3t = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $\begin{cases} x - z + t = 0 \\ y - z + 3t = 0 \end{cases}$ est un système d'équations cartésiennes de F .

2. (a) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

$G \subset \mathbb{R}^4$.

Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned} (x, y, z, t) \in G &\iff \begin{cases} -2x + y + z + t = 0 \\ x - z + t = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = 5x \\ t = -2x \\ z = -x \end{cases} \\ &\iff (x, y, z, t) = x(1, 5, -1, -2) \end{aligned}$$

Donc $G = \text{Vect}((1, 5, -1, -2))$. Ainsi G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

- (b) Base de G .

$((1, 5, -1, -2))$ est une famille génératrice de G et libre (un seul vecteur non nul). Ainsi $((1, 5, -1, -2))$ est une base de G .

3. (a) Base de $F \cap G$.

Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned} (x, y, z, t) \in F \cap G &\iff \begin{cases} x - z + t = 0 \\ y - z + 3t = 0 \\ \exists \lambda \in \mathbb{R} / (x, y, z, t) = \lambda(1, 5, -1, -2) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda + \lambda - 2\lambda = 0 \\ 5\lambda + \lambda - 6\lambda = 0 \\ \exists \lambda \in \mathbb{R} / (x, y, z, t) = (\lambda, 5\lambda, -\lambda, -2\lambda) \end{cases} \\ &\iff (x, y, z, t) \in G \end{aligned}$$

Donc $F \cap G = G$. Alors $((1, 5, -1, -2))$ est une base de $F \cap G$.

Base de $F + G$.

D'après la formule de Grassmann, $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) = \dim F + \dim G - \dim G = \dim F$.

De plus, $F \subset F + G$. Donc $F + G = F$.

Alors $((1, 1, 1, 0), (1, -1, 2, 1))$ est une base de $F + G$.

- (b) Conclusion sur F et G .

F et G ne sont pas supplémentaires dans E .

4. Montrons que $H = F$.

$H = \text{Vect}(u, v)$ avec $u = (2, 0, 3, 1)$ et $v = (1, 3, 0, -1)$.

(u, v) est une famille libre (vecteurs non colinéaires) et génératrice de H .

Donc (u, v) est une base de H . D'où $\dim H = \text{card}(u, v) = 2$.

Or $\dim F = 2$ donc $\dim H = \dim F$.

$(1, 1, 1, 0) + (1, -1, 2, 1) = (2, 0, 3, 1) = u$ donc $u \in F$ et

$(1, 1, 2, 1) = (1, 3, 0, -1) = v$ donc $v \in F$. Alors $\text{Vect}(u, v) \subset F$.

D'où $H \subset F$. Ainsi $H = F$.

EXERCICE 20

2. Déterminer un supplémentaire dans $\mathbb{R}^3$ du sev suivant :

$F = \text{Vect}(u, v, w)$ avec $u = (-1, 1, 0)$, $v = (2, 0, 1)$ et $w = (1, 1, 1)$.

$u + v = w$ donc $F = \text{Vect}(u, v)$.

(u, v) est une famille génératrice de F . De plus, les vecteurs u et v ne sont pas colinéaires donc (u, v) est libre. C'est donc une base de F . D'où $\dim(F) = 2$.

Or $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ donc un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$ est de dimension 1.

Posons $G = \text{Vect}((1, 0, 0))$.

(Remarque : Choisissez un vecteur de G parmi les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$)

$((1, 0, 0))$ est une base de G (à montrer) donc $\dim(G) = \text{card}((1, 0, 0)) = 1$.

Montrons que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Soit $\mathcal{B} = ((-1, 1, 0), (2, 0, 1), (1, 0, 0))$ la famille obtenue en concaténant les bases de F et G . Montrons que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a(-1, 1, 0) + b(2, 0, 1) + c(1, 0, 0) = 0_{\mathbb{R}^3}$.

Montrons que $a = b = c = 0$.

$a(-1, 1, 0) + b(2, 0, 1) + c(1, 0, 0) = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \dots \iff a = b = c = 0$.

Donc $\mathcal{B}$ est libre. De plus, $\text{card}(\mathcal{B}) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Ainsi F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Donc $G = \text{Vect}((1, 0, 0))$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$.

EXERCICE 21

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour tout réel a , on pose $F_a = \{P \in E / P(a) = 0\}$.

Remarque :

§ Il faut penser à montrer que F_a est un sous-espace vectoriel de E .

(a) On suppose que $n = 1$.

Montrer que $F_1 + F_2 = E$. F_1 et F_2 sont-ils supplémentaires dans E ?

- F_1 et F_2 sont des sous-espaces de E donc $F_1 + F_2 \subset E$. De plus, E est de dimension finie donc $F_1 + F_2$ est de dimension finie.

- D'après la formule de Grassmann,
 $\dim(F_1 + F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2) - \dim(F_1 \cap F_2)$.

Or $F_1 = \text{Vect}(X - 1)$ (à montrer!) et $(X - 1)$ est une base de F_1 (à montrer!) donc $\dim(F_1) = \text{card}(X - 1) = 1$.

De plus, $F_2 = \text{Vect}(X - 2)$ (à montrer!) et $(X - 2)$ est une base de F_2 donc $\dim(F_2) = \text{card}(X - 2) = 1$.

On montre également que $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$ (à montrer!) donc

$$\dim(F_1 + F_2) = 1 + 1 - 0 = 2.$$

Or $\dim(E) = 2$ donc $\dim(F_1 + F_2) = \dim(E)$. D'où $F_1 + F_2 = E$.

$F_1 + F_2 = E$ et $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$ donc F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E .

(b) Mêmes questions en supposant $n = 2$.

- F_1 et F_2 sont des sous-espaces de E donc $F_1 + F_2 \subset E$. De plus, E est de dimension finie donc $F_1 + F_2$ est de dimension finie.

- D'après la formule de Grassmann, $\dim(F_1 + F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2) - \dim(F_1 \cap F_2)$.

Or $F_1 = \text{Vect}(X - 1, X^2 - 1)$ (à montrer!) donc $(X - 1, X^2 - 1)$ est une famille génératrice de F_1 .

$(X - 1, X^2 - 1)$ est une famille de polynômes non nuls de degrés distincts donc elle est libre.

C'est donc une base de F_1 . Ainsi $\dim(F_1) = \text{card}(X - 1, X^2 - 1) = 2$.

De plus, $F_2 = \text{Vect}(X - 2, X^2 - 4)$ (à montrer!) et $(X - 2, X^2 - 4)$ est une base de F_2 donc $\dim(F_2) = \text{card}(X - 2, X^2 - 4) = 2$.

On montre également que $F_1 \cap F_2 = \text{Vect}(X^2 - 3X + 2)$ (à montrer!) et $(X^2 - 3X + 2)$ est une base de $F_1 \cap F_2$. Ainsi $\dim(F_1 \cap F_2) = 1$.

Alors $\dim(F_1 + F_2) = 2 + 2 - 1 = 3 = \dim(E)$.

D'où $F_1 + F_2 = E$.

$F_1 + F_2 = E$ et $F_1 \cap F_2 \neq \{0_E\}$ donc F_1 et F_2 ne sont pas supplémentaires dans E .

EXERCICE 24

1. Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

$F \subset \mathbb{R}[X]$ et le polynôme nul appartient à F .

Soit $(P, Q) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $(P + \lambda Q)(-1) = P(-1) + \lambda Q(-1) = 0 + \lambda \times 0 = 0$ et $(P + \lambda Q)(1) = P(1) + \lambda Q(1) = 0$.

$(P + \lambda Q)'(-1) = (P' + \lambda Q')(-1) = P'(-1) + \lambda Q'(-1) = 0$ et

$(P + \lambda Q)'(1) = P'(1) + \lambda Q'(1) = 0$ donc $P + \lambda Q \in F$.

Ainsi F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrons que $P \in F$ ssi $(X^2 - 1)^2$ divise P .

$$P \in F \iff P(-1) = P(1) = P'(-1) = P'(1) = 0$$

$$\iff 1 \text{ et } -1 \text{ sont au moins racines doubles de } P$$

$$\iff (X - 1)^2(X + 1)^2 \text{ divise } P$$

$$\iff (X^2 - 1)^2 \text{ divise } P$$

Donc $P \in F \iff (X^2 - 1)^2 \text{ divise } P$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $F_n = F \cap \mathbb{R}_n[X]$.

(a) Justifions que F_n est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ de dimension finie.

F et $\mathbb{R}_n[X]$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$, donc leur intersection est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

De plus $F \cap \mathbb{R}_n[X] \subset \mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie.

Ainsi F_n est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ de dimension finie.

(b) Dimension de F_n en supposant $0 \leq n \leq 3$.

Soit $P \in F_n$, alors $P \in F \cap \mathbb{R}_n[X]$, donc $\deg P \leq n$ et d'après la question 2., $(X^2 - 1)^2$ divise P .

$(X^2 - 1)^2$ divise P donc P est le polynôme nul ou

$\deg P \geq \deg((X^2 - 1)^2)$. Or $\deg((X^2 - 1)^2) = 4 > n$ donc on a une contradiction avec $\deg P \leq n$. Ainsi P est le polynôme nul.

Réciproquement, si P est le polynôme nul, alors $P \in F_n$.

Ainsi $F_n = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$, donc $\dim F_n = 0$.

(c) On suppose que $n \geq 4$. On pose $L_i = X^i(X^2 - 1)^2$ pour tout $i \in \llbracket 0; n-4 \rrbracket$.

Montrer que la famille $(L_i)_{0 \leq i \leq n-4}$ est une base de F_n .

En déduire la dimension de F_n .

- Montrons tout d'abord que $(L_i)_{0 \leq i \leq n-4}$ est une famille de vecteurs de F_n .

Soit $i \in \llbracket 0; n-4 \rrbracket$, $\deg(L_i) = i + 4$ et $i + 4 \leq n$ donc $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$.

De plus, $(X^2 - 1)^2 | L_i$ donc $L_i \in F$. Ainsi $L_i \in F_n$.

- Montrons que $(L_i)_{0 \leq i \leq n-4}$ est une famille libre.

C'est une famille de polynômes non nuls de degrés distincts donc elle est libre.

- Montrons que $(L_i)_{0 \leq i \leq n-4}$ est une famille génératrice de F_n .

Soit $P \in F_n$. Alors $P \in F$. Donc $(X^2 - 1)^2 | P$.

Ainsi il existe $Q \in \mathbb{R}_{n-4}[X]$ tel que $P = (X^2 - 1)^2 Q$.

$Q \in \mathbb{R}_{n-4}[X]$ donc il existe $(a_i)_{0 \leq i \leq n-4} \in \mathbb{R}^{n-3}$ tel que $Q = \sum_{i=0}^{n-4} a_i X^i$.

$$\text{Alors } P = (X^2 - 1)^2 \sum_{i=0}^{n-4} a_i X^i = \sum_{i=0}^{n-4} a_i X^i (X^2 - 1)^2 = \sum_{i=0}^{n-4} a_i L_i.$$

Donc $P \in \text{Vect}((L_i)_{0 \leq i \leq n-4})$.

Ainsi $(L_i)_{0 \leq i \leq n-4}$ est une famille génératrice de F_n .

- On peut donc conclure que $(L_i)_{0 \leq i \leq n-4}$ est une base de F_n .

De plus, $\dim(F_n) = \text{card}((L_i)_{0 \leq i \leq n-4}) = n - 3$.