

**Polynômes.**

- Définition d'un polynôme, égalité de deux polynômes, définition de  $\mathbb{K}_n[X]$ , somme de deux polynômes et degré, multiplication d'un polynôme par un scalaire, produit de deux polynômes, formule du binôme de Newton, identité  $P^n - Q^n$ , composée de deux polynômes, définition du degré et propriétés, liberté d'une famille de polynômes non nuls de degrés distincts, fonction polynomiale associée à un polynôme.
- Arithmétique des polynômes : divisibilité, polynômes associés, division euclidienne.
- Dérivation dans  $\mathbb{K}[X]$  : polynôme dérivé, lien avec le degré, opérations sur les dérivées, dérivées successives, formule de Leibniz, formule de Taylor, base de  $\mathbb{K}_n[X]$ .
- Définition d'une racine d'un polynôme, lien avec la divisibilité, majoration du nombre de racines par le degré d'un polynôme, multiplicité d'une racine (définition et caractérisation par la divisibilité et les polynômes dérivés), polynôme scindé (définition et caractérisation avec la somme des ordres de multiplicité des racines), relation entre les coefficients et la somme des racines d'un polynôme, relation entre les coefficients et le produit des racines d'un polynôme.

**Espaces vectoriels de dimension finie.**

- Définition d'un espace vectoriel de dimension finie, théorème de la base incomplète et de la base extraite, définition de la dimension, exemples de référence.
- Nombre de vecteurs d'une famille libre, d'une famille génératrice d'un espace vectoriel de dimension finie, famille libre d'un espace vectoriel de dimension finie égale au cardinal de cette famille et famille génératrice d'un espace vectoriel de dimension finie égale au cardinal de cette famille.
- Dimension d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie, caractérisation de l'égalité de deux espaces vectoriels avec la dimension, définitions d'une droite vectorielle, de plan vectoriel.  
Formule de Grassmann, existence d'un supplémentaire en dimension finie, caractérisations de la supplémentarité à l'aide des dimensions.
- Définition et calcul du rang, lien avec les familles libres/génératrices.

**Dénombrement.**

- Cardinal d'un ensemble fini, d'une partie d'un ensemble fini, opérations sur les cardinaux (réunion, complémentaire, différence et produit cartésien).
- Définition d'une  $p$ -liste d'un ensemble de cardinal  $n$ , nombre de  $p$ -listes, définition d'un  $p$ -arrangement, nombre de  $p$ -arrangements; définition d'une permutation, nombre de permutations; définition d'une combinaison, nombre de  $p$ -combinaisons, formule de Pascal.

**Probabilités sur un univers fini.**

- Lien entre vocabulaire ensembliste et vocabulaire des probabilités; définition d'une probabilité sur l'univers, définition d'une probabilité sur l'univers à partir de la probabilité de chaque événement élémentaire, définition de la probabilité uniforme sur un univers (lien avec le cardinal des événements), propriétés d'une probabilité (complémentarité, différence, réunion, croissance), définition d'un système complet d'événements de l'univers.
- Définition de la probabilité conditionnelle, formule des probabilités composées, formule des probabilités totales sur un système complet d'événements de l'univers, formule de Bayes.
- Définition de deux événements indépendants, de  $n$  événements deux à deux indépendants, définition de l'indépendance mutuelle pour une famille finie d'événements, lien avec l'indépendance 2 à 2.

**Un énoncé au choix à demander :**

- Définition du degré d'un polynôme.
- Degré d'un produit de deux polynômes, de la composée  $P \circ Q$  avec  $Q$  polynôme non constant.
- Définition de la fonction polynomiale associée à un polynôme.
- Théorème de la division euclidienne.
- Formule de Taylor pour les polynômes.
- Définition et caractérisation d'une racine d'un polynôme.
- Définition et caractérisation de la multiplicité d'une racine.
- Définition et caractérisation d'un polynôme scindé.
- Relation entre les coefficients et la somme des racines d'un polynôme, relation entre les coefficients et produit des racines.
- Définition d'un polynôme irréductible.
- Donner les polynômes irréductibles dans  $\mathbb{C}[X]$  et dans  $\mathbb{R}[X]$ .
- Définition d'un espace vectoriel de dimension finie.
- Définition de la dimension d'un espace vectoriel de dimension finie.
- Dimension de  $\mathbb{K}_n[X]$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) et de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  ( $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ ).
- Formule de Grassmann.
- Caractérisation de deux sous-espaces supplémentaires en dimension finie.
- Définition du rang d'une famille finie de vecteurs d'un espace vectoriel.
- Définition d'un système complet d'évènements de l'univers.
- Formule des probabilités composées.
- Formule des probabilités totales.
- Formule de Bayes.
- Définition de 2 évènements indépendants et de deux évènements incompatibles.
- Définition d'une  $p$ -liste, d'un arrangement de  $p$  éléments, d'une permutation et d'une combinaison de  $p$  éléments d'un ensemble fini de cardinal  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Démonstrations :**

- Existence d'un supplémentaire en dimension finie.
- Démonstration combinatoire de la formule de Pascal.
- Soit  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$  un espace probabilisé et  $A \in \mathcal{P}(\Omega)$  tel que  $P(A) \neq 0$ .  
L'application  $P_A : B \mapsto \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$  définie sur  $\mathcal{P}(\Omega)$  est une probabilité sur  $\Omega$ .

**Exercices traités dans au moins l'une des deux classes :**

TD 10 : exercice 7, exercice 8, exercice 9, exercice 10 questions 1 et 2, exercice 11 question 2.(a) et 2.(c), exercice 12 question 2, exercice 13, exercice 14, exercice 16, exercice 17, exercice 19, exercice 20 questions 1 et 3.

TD 11 : exercice 1, exercice 2, exercice 3, exercice 4.

**Exercices traités en autonomie :**

Cahier de vacances en ligne sur le site.

TD 10 : exercice 11 question 1, exercice 12 question 1, exercice 15, exercice 18, exercice 20 question 2, exercice 24.

TD 11 : exercice 7, exercice 10.