

OBJECTIFS :

- P 25-1 : Savoir calculer le cardinal d'un ensemble, d'une réunion, du produit cartésien d'ensembles.
- P 25-2 : Reconnaître et dénombrer des p -listes, des arrangements, des permutations, des combinaisons.
- P 26-1 : Utiliser les propriétés des probabilités.
- P 26-2, P 26-3, P 26-4 : Mettre en oeuvre les formules des probabilités totales, des probabilités composées, de Bayès.
- P 26-5 : Utiliser la formule des probabilités totales pour obtenir une relation de récurrence entre les termes d'une suite de probabilités.
- P 26-6 et P 26-7 : Etudier l'indépendance de deux événements et l'indépendance mutuelle de n événements.

Dénombrement

EXERCICE 1

Les questions sont indépendantes.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre de triplets $(x, y, z) \in \llbracket 0; n \rrbracket^3$ tels que $xyz = 0$.
2. Déterminer le nombre de couples $(n, p) \in \llbracket 1; 10 \rrbracket^2$ tels que 2 divise n et 3 divise p .
3. Soit $E = \{n \in \llbracket 1; 100 \rrbracket / 2 \text{ divise } n \text{ ou } 3 \text{ divise } n\}$.
Déterminer le cardinal de E .

EXERCICE 2

Les questions sont indépendantes.

1. De combien de façons peut-on choisir un président, puis un secrétaire puis un trésorier dans un bureau composé de 10 personnes, une personne ne pouvant pas occuper plusieurs postes?
2. On souhaite ranger sur une étagère 6 livres de mathématiques (distincts), 4 livres de physique (distincts), et 3 de SI (distincts).
De combien de façons peut-on effectuer ce rangement :
 - si les livres doivent être groupés par matière.
 - si seuls les livres de mathématiques doivent être groupés.
3. On tire simultanément cinq cartes dans un jeu de 32 cartes.
 - (a) Combien y a-t-il de tirages possibles?
 - (b) Combien y a-t-il de tirages comportant la dame de pique? exactement deux cœurs? au moins un roi? ni un as, ni un carreau? exactement deux valets et exactement trois trèfles?
4. Une urne contient 5 boules blanches et 8 boules noires. On tire successivement et avec remise 4 boules de l'urne.
 - (a) Combien y a-t-il de tirages possibles?
 - (b) Combien y a-t-il de tirages comportant au moins une boule blanche? 3 boules noires et une boule blanche dans cet ordre? au plus une boule noire? 2 boules noires et 2 boules blanches?

EXERCICE 3

1. On dispose d'un quadrillage " 2×2 " rapporté au repère $(A; \vec{i}, \vec{j})$ comme l'indique le schéma ci-dessous.



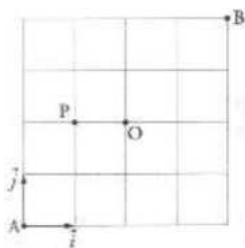
B est le point de coordonnées $(2;2)$. On appelle chemin minimal de A à B toute succession de 4 vecteurs $\vec{i}$ ou $\vec{j}$ dont la somme est $\overrightarrow{AB}$.

Par exemple, la succession $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{i}, \vec{j})$, matérialisée sur le schéma ci-dessus, est un chemin minimal de A à B .

Dessiner tous les chemins minimaux de A à B possibles. Comment pouvait-on prévoir leur nombre?

2. On dispose maintenant d'un quadrillage de taille " 4×4 ". B est le point de coordonnées $(4;4)$.

Un chemin minimal de A à B est une succession de 8 vecteurs $\vec{i}$ ou $\vec{j}$ dont la somme est $\overrightarrow{AB}$.



- Déterminer le nombre de chemins minimaux de A à B possibles.
- Déterminer le nombre de chemins passant par O , centre du quadrillage; puis le nombre de chemins passant par $P(1;2)$ et enfin le nombre de chemins passant par P ou O .

Probabilités sur un univers fini

EXERCICE 4

Dans une salle de jeux, un appareil comporte 4 roues, chacune portant à sa périphérie 8 images de fruits différents : ananas, bananes, cerises, dattes, fraises, groseilles, poires et raisins.

Chacune des quatre roues affiche au hasard dans une fenêtre un de ces huit fruits. On admet l'équiprobabilité de tous les affichages.

Calculer la probabilité des événements suivants :

- E : "on obtient 4 fruits identiques".

- F : "on obtient 3 fruits identiques et 3 seulement".
- G : "on obtient 4 fruits distincts".

EXERCICE 5

Le gardien d'un phare doit ouvrir une porte avec un trousseau de n ($n \in \mathbb{N}^*$) clefs dont une et une seule convient. Il essaie les clefs au hasard les unes après les autres.

Un peu distrait, il ne met pas à l'écart les clefs qu'il a déjà essayées.

Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la probabilité que la porte s'ouvre au k -ième essai (mais pas avant).

EXERCICE 6

10 garçons et 15 filles descendent de manière désordonnée d'un bus.

Quelle est la probabilité que les 3 premiers à descendre soient des garçons et que la quatrième soit une fille?

EXERCICE 7

On dispose d'un dé cubique équilibré dont une face porte le numéro 1, deux faces portent le numéro 2 et trois portent le numéro 3.

On dispose également d'une urne contenant dix boules indiscernables au toucher, portant les lettres L, O, G, A, R, I, T, H, M, E (soit 4 voyelles et 6 consonnes).

Un joueur fait une partie en deux étapes :

Première étape : il lance le dé et note le numéro obtenu.

Deuxième étape :

- Si le dé indique 1, il tire au hasard une boule de l'urne. Il gagne la partie si cette boule porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.
- Si le dé indique 2, il tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces deux boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.
- Si le dé indique 3, il tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces trois boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.

À la fin de chaque partie, il remet dans l'urne la ou les boules tirée(s).
 On définit les événements suivants : D1 : « le dé indique 1 » ;
 D2 : « le dé indique 2 » ; D3 : « le dé indique 3 » et G : « la partie est gagnée ».
 Un joueur a gagné la partie. Calculer la probabilité qu'il ait obtenu le numéro 1 avec le dé.

EXERCICE 8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n sacs $S_1, \dots, S_n$. Pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, le sac S_k contient k jetons blancs et $(n+1-k)$ jetons rouges.
 On choisit un sac avec une probabilité de choisir le sac S_k égale à $k\alpha$.
 Ensuite, on tire au hasard un jeton dans le sac choisi.

1. Déterminer la valeur de α .
2. Le jeton pioché est blanc. Exprimer en fonction de k la probabilité que ce jeton provienne du sac S_k .

EXERCICE 9

On dispose de n cartons numérotés de 1 à n . On tire un carton au hasard.
 Si k est le numéro du carton, on place alors dans une urne k boules blanches et $n-k$ boules noires.
 On tire successivement et avec remise deux boules de cette urne.

1. Calculer la probabilité de tirer deux boules blanches.
2. Sachant que l'on a tiré deux boules blanches, quelle est la probabilité d'avoir tiré le carton n ?

EXERCICE 10

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0; 1]$.
 Un individu I_0 dispose d'une information binaire (Vrai ou Faux).
 Il la transmet à I_1 , qui la transmet à $I_2, \dots$, qui la transmet à I_n .
 Chacun transmet l'information reçu (ou son inverse) avec la probabilité p (ou $1-p$).
 Quelle est la probabilité p_n pour que I_n dispose de l'information correcte?

EXERCICE 11

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Dans la chorale d'un lycée, il y a 7 élèves de Seconde, 9 élèves de Première et n élèves de Terminale.

De plus, parmi les élèves de Seconde, il n'y a qu'une seule fille, contre 3 parmi les élèves de Première et 6 parmi les élèves de Terminale.

On tire au sort un élève de la chorale.

1. Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de n les événements «l'élève est en Terminale» et «l'élève est une fille» sont indépendants.
2. Pour $n = 24$, que peut-on dire de l'indépendance éventuelle des événements :
 - (a) «l'élève est en Terminale» et «l'élève est un garçon»?
 - (b) «l'élève est en Première» et «l'élève est une fille»?

EXERCICE 12

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Un étudiant de prépa décide de faire un footing tous les jours.
 Chaque jour, il court une heure, une demi-heure ou pas du tout...
 On considère les événements :

A_n : « l'étudiant court une heure le jour n », B_n : « l'étudiant court une demi-heure le jour n » et C_n : « l'étudiant ne fait pas de footing le jour n ».

Soit a_n, b_n et c_n les probabilités correspondantes.

Le jour numéro 0, l'étudiant a couru une heure.

On sait par ailleurs qu'un jour donné :

- S'il court une heure ou ne court pas, le lendemain, il court une demi-heure.
- S'il court une demi-heure, le lendemain, il court une heure avec une probabilité de $\frac{1}{4}$ et il court une demi-heure avec une probabilité de $\frac{1}{2}$.

1. (a) On note $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Préciser X_0 et X_1 .
 (b) Déterminer une relation de récurrence sur les suites $(a_n), (b_n)$ et (c_n) .

(c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$ avec $A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ puis que

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0.$$

2.
 - (a) Calculer A^2 et A^3 puis trouver une relation entre A , A^2 et A^3 .
 - (b) Montrer que pour tout $n \geq 1$, il existe un couple de réels (u_n, v_n) tels que $A^n = u_n A^2 + v_n A$ et déterminer des relations de récurrence vérifiées par les suites (u_n) et (v_n) .
 - (c) Montrer que la suite $(u_n + v_n)$ est constante.
 - (d) En déduire que la suite (v_n) est arithmético-géométrique, puis déterminer u_n et v_n en fonction de n .
 - (e) Déterminer l'expression de A^n en fonction de n .
3. Déduire de l'étude précédente, les expressions de a_n, b_n et c_n en fonction de n , puis les limites des suites $(a_n), (b_n)$ et (c_n) .