



## OBJECTIFS :

- AL 27-1 : Montrer qu'une application est linéaire.
- AL 27-2 et AL 27-3 : Déterminer le noyau et l'image d'une application linéaire.
- AL 27-4, AL 27-5 et AL 27-6 : Montrer qu'une application linéaire est injective, surjective, bijective.
- AL 27-7 : Déterminer le rang d'une application linéaire.
- AN 28-1 : Utiliser la dérivabilité pour calculer des limites.
- AN 28-2 : Interpréter géométriquement un nombre dérivé.
- AN 28-3 et AN 28-4 : Etudier la dérivabilité d'une fonction en un point, sur un intervalle.
- AN 28-5 : Calculer la dérivée d'une fonction et les dérivées successives.
- AN 28-6 et AN 28-7 : Connaître et savoir utiliser les théorèmes de Rolle et des accroissements finis.
- AN 28-8 et AN 28-9 : Montrer qu'une fonction est de classe  $\mathcal{C}^1$ ,  $\mathcal{C}^n$  ou  $\mathcal{C}^\infty$  en un point, sur un intervalle.
- AN 28-10 : Déterminer une valeur approchée d'un nombre réel à l'aide des suites.
- AN 28-11 : Résoudre une équation différentielle avec raccordement.

## Applications linéaires

### EXERCICE 1

Les applications suivantes sont-elles linéaires? Lorsqu'elles le sont, déterminer le noyau et l'image.

$$1. \quad f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x, xy, x - z)$$

$$2. \quad f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z) \mapsto (x + y, 2x + z, 0, x - y + z)$$

$$3. \quad f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x - 3y, x + y, z + 2)$$

$$4. \quad f : \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ u \mapsto \exp \circ u$$

$$5. \quad f : \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ u \mapsto u \times \cos u$$

$$6. \quad \phi : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f \mapsto 2f' - f$$

$$7. \quad f : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$$

$$8. \quad f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P \mapsto P + (1 - X)P'$$

$$9. \quad f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto iz - i\bar{z}$$

$$10. \quad f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M \mapsto M^T$$

### EXERCICE 2

1. Soit  $f$  l'application définie sur  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  par  $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), f(M) = AM$  avec  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

(a) Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

(b) Déterminer le noyau et l'image de  $f$ .

L'application  $f$  est-elle injective? surjective? bijective?

2. Mêmes questions avec  $f$  définie sur  $\mathbb{R}_2[X]$  par  $\forall P \in \mathbb{R}_2[X], f(P) = XP' + P$ .

### EXERCICE 3

Soit  $f$  et  $g$  les applications définies sur  $\mathbb{R}^2$  par  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x + y, 2x)$  et  $g(x, y) = (y, x)$ .

1. Montrer que  $f$  et  $g$  sont des automorphismes de  $\mathbb{R}^2$ .

Déterminer  $f^{-1}$  et  $g^{-1}$ .

2. On note  $h = g \circ f - f \circ g$ .

- (a) Justifier que  $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ .
- (b) L'application  $h$  est-elle injective? surjective?

#### EXERCICE 4

Soit  $E = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n\}$ .

1. Montrer que  $E$  est un espace vectoriel.
2. Soit  $\phi$  l'application de  $E$  dans  $\mathbb{R}^2$  définie par  $\forall (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ ,  
 $\phi((u_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (u_0, u_1)$ .  
Montrer que  $\phi$  est linéaire. Déterminer son noyau et son image et conclure.

#### EXERCICE 5

1. Démontrer qu'il existe une unique application linéaire  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^2$  telle que  $f(1, 0, 0) = (0, 1)$ ,  $f(1, 1, 0) = (1, 0)$  et  $f(1, 1, 1) = (1, 1)$ .  
Calculer  $f(x, y, z)$  pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .  
Déterminer le noyau et l'image de  $f$ .
2. Démontrer qu'il existe une unique application linéaire  $f$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^3$  telle que  $f(1, 2) = (1, 1, 0)$  et  $f(2, 1) = (0, 1, 1)$ .  
Calculer  $f(x, y)$  pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .  
Déterminer le noyau et l'image de  $f$ .

#### EXERCICE 6

Soit  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  définie par  $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (4x + 2y - 4z, 2y, 2x + 2y - 2z)$ .

1. (a) Déterminer une base de  $\text{Ker } f$  et une base de  $\text{Im } f$ .  
(b) Soit  $\mathcal{B}'$  la famille formée par concaténation d'une base de  $\text{Ker } f$  et d'une base de  $\text{Im } f$ .  
Justifier que  $\mathcal{B}'$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  et déterminer les coordonnées, dans  $\mathcal{B}'$ , des images par  $f$  des vecteurs de  $\mathcal{B}'$ .

2. Soit  $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - 2z = 0 \text{ et } -3x - 2y + 4z = 0\}$ .

- (a) Montrer que  $G$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .
- (b)  $G$  et  $\text{Im } f$  sont-ils supplémentaires dans  $\mathbb{R}^3$ ?

#### EXERCICE 7

On considère l'application  $f$  de  $\mathbb{R}_2[X]$  définie par  $\forall P \in \mathbb{R}_2[X]$ ,  
 $f(P) = (X^2 + 1)P(1) + P$ .

1. Montrer que  $f$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
2. Le but de cette question est de déterminer l'expression de  $f^{-1}$ .
  - (a) Montrer que  $f^2 - 4f + 3id = 0$  où  $f^2 = f \circ f$  et  $id$  est l'application identité de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
  - (b) En déduire une expression de  $f^{-1}$  en fonction de  $f$ .
  - (c) Déterminer l'expression explicite de  $f^{-1}(P)$  pour tout  $P \in \mathbb{R}_2[X]$ .

#### EXERCICE 8

Soit  $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$  la base canonique de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  où  $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  
 $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. On considère l'application trace, notée  $Tr$ , définie sur  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  par  
 $\forall M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), Tr(M) = a + d$  et on admet que cette application est linéaire de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  dans  $\mathbb{R}$ .
  - (a) Déterminer le noyau et l'image de l'application  $Tr$ .
  - (b) L'application  $Tr$  est-elle injective? surjective?
2. Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  deux matrices de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .  
On considère l'application  $f$  définie sur  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  par  $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ,  
 $f(M) = Tr(M)A + BM$ .

- (a) Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
- (b) Vérifier que  $f(E_{11}) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Déterminer une base de l'image de  $f$ .
- (c) Calculer  $f(E_{11} - E_{12} + E_{21} - E_{22})$ . Déterminer une base du noyau de  $f$ .

### EXERCICE 9

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $f$  un endomorphisme de  $E$ .  
Montrer que  $\text{Ker}(f \circ f) = \text{Ker } f$  si et seulement si  $\text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0\}$ .

### EXERCICE 10

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $f$  une endomorphisme de  $E$  vérifiant  $f \circ f = -f$  (\*).

- Montrer que  $\forall x \in E, f(x) + x \in \text{Ker } f$ .
- L'application  $-id_E$  vérifie-t-elle (\*)? Si oui, est-elle bijective?
  - On suppose  $f \neq -id_E$ .  
Montrer qu'il existe  $x_0 \in E$  tel que  $f(x_0) + x_0 \neq 0_E$ .  
En déduire que  $f$  n'est pas bijective.
- Montrer que  $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$ .

### EXERCICE 11

Les questions sont indépendantes.

- Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par

$$f: x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ ax^2 + bx + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \text{ soit dérivable sur } \mathbb{R}_+^*.$$

- Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $\forall x \in ]0; +\infty[, f(x) = x^2 \left[ \frac{1}{x} \right]$ .

(a) Montrer que  $f$  est prolongeable par continuité en 0.

On note encore  $f$  la fonction ainsi prolongée.

(b) Etudier la dérivabilité de  $f$  en 0.

- Etudier la dérivabilité de la fonction  $f$  définie sur  $[-1; 1]$  par

$$\forall x \in [-1; 1], f(x) = (1 - x^2)\text{Arccos}(x^2).$$

- Montrer que,  $\forall x \in \mathbb{R}_+, x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$ .

(b) Montrer que la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}.$$

### EXERCICE 12

Les questions sont indépendantes.

- Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $a < b$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $n$  fois dérivable sur  $[a; b]$ .

On suppose que  $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = f(b) = 0$ .

Démontrer qu'il existe  $c \in ]a; b[$  tel que  $f^{(n)}(c) = 0$ .

2. Soit  $a > 0$  et  $f : [0; a] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable sur  $[0; a]$  telle que  $f(0) = f(a) = 0$  et  $f'(0) = 0$ .
- (a) Montrer que la dérivée de  $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$  s'annule sur  $]0; a[$ .
- (b) En déduire qu'il existe un point autre que l'origine en lequel la tangente à la courbe de la fonction  $f$  passe par l'origine.
3. Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $a < b$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^n + ax + b$  s'annule au plus trois fois sur  $\mathbb{R}$ .

### EXERCICE 13

Les questions sont indépendantes.

Démontrer les inégalités suivantes :

1.  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |\operatorname{Arctan}(x) - \operatorname{Arctan}(y)| \leq |x - y|$ .
2.  $\forall x \in \mathbb{R}_+, x \leq e^x - 1 \leq xe^x$ .
3.  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$ .

### EXERCICE 14

Les questions sont indépendantes.

1. Montrer que la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f : t \mapsto \begin{cases} t^2 e^{\frac{1}{t}} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$  est dérivable sur  $] -\infty; 0]$ . Est-elle de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] -\infty; 0]$  ?
2. La fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{e^{x^2} - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$  est-elle de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  ?
3. Déterminer la classe de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f : x \mapsto x|x|$ .

### EXERCICE 15

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Après avoir justifié leur existence, calculer la dérivée  $n$ -ième de chacune des fonctions  $f$  suivantes :
- (a)  $f : x \mapsto e^x \sin x$
- (b)  $f : x \mapsto x^2(1+x)^n$
2. Calculer de deux façons différentes la dérivée  $n$ -ième de  $f : x \mapsto x^{2n}$ .

En déduire  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$ .

### EXERCICE 16

L'objectif de cet exercice est de proposer une méthode pour déterminer une valeur approchée de  $\sqrt{2}$  à  $10^{-4}$  près.

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{1 + \frac{x^2}{2}}$  et  $(u_n)$  la suite

définie par  $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ .

1. Montrer que la fonction  $f$  est  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ -lipschitzienne sur  $\mathbb{R}$ .
2. (a) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} |u_n - \sqrt{2}|$ .
- (b) En déduire que  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \sqrt{2}| \leq \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ .
- (c) Montrer que  $(u_n)$  converge et préciser sa limite.
- (d) On donne  $\frac{\ln 5}{\ln 2} \approx 2,3$ . A partir de quel rang  $N$  est-on assuré que  $u_N$  est une valeur approchée de  $\sqrt{2}$  à  $10^{-4}$  près ?

### EXERCICE 17

1. Soit  $C$  et  $D$  deux réels. On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \begin{cases} x^2 + Cx & \text{si } x > 0 \\ x^2 - Dx & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- (a) Montrer que  $f$  est prolongeable par continuité en 0.
  - (b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur  $C$  et  $D$  pour que le prolongement ainsi obtenu soit de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. On considère l'équation différentielle  $(E) : xy' - y = x^2$ .
- (a) Sur quels intervalles se place-t-on pour résoudre cette équation?
  - (b) Résoudre cette équation sur chacun des intervalles déterminés ci-dessus.
  - (c) Résoudre l'équation  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$ .

### EXERCICE 18

On considère l'équation différentielle  $(E) : ty' + |t|y = t^2 e^{-|t|}$ .

- 1. (a) Sur quels intervalles se place-t-on pour résoudre cette équation?
  - (b) Résoudre l'équation  $(E)$  sur chacun des intervalles déterminés ci-dessus.
2. Etudier l'existence de solutions définies et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .