Problème :

On considère l'équation différentielle sur $]0,\pi[$:

$$(E) : y''(x) + y(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Partie A :

(1) On introduit la fonction

$$\begin{array}{rccl} f & : &]0,\pi[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \sin(x)\ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right). \end{array}$$

 (a) Montrer que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,\pi[$.

 (b) Montrer que, pour tout $x \in]0,\pi[$, $f''(x) = -f(x) + \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

(2) Résoudre l'équation homogène associée à (E). En déduire les solutions de (E) sur $]0,\pi[$.

Partie B :

Dans cette partie, on souhaite retrouver de manière différente le résultat obtenu précédemment. Pour cela, on cherche les solutions de (E) sur $]0,\pi[$ de la forme

$$x \mapsto y(x) = z(x)\sin(x),$$

où z est une fonction deux fois dérivable sur $]0,\pi[$.

(3) (a) Montrer que la fonction $g : x \mapsto \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$ est dérivable sur $]0,\pi[$.

 (b) En déduire une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sin(x)}$.

(4) (a) Montrer que la fonction h définie sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$ par $h(x) = \frac{1}{\tan(x)}$ se prolonge en une fonction $\widetilde{h}$ continue sur $]0,\pi[$.

 (b) Montrer que $\widetilde{h}$ est dérivable sur $]0,\pi[$.

 (c) En déduire une primitive sur $]0,\pi[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)}$.

(5) (a) Montrer que y est solution de (E) sur $]0,\pi[$ si et seulement si z' est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre sur $]0,\pi[$ que l'on notera (E').

 (b) Déterminer les solutions de (E') et en déduire l'expression de $z'(x)$ pour tout $x \in]0,\pi[$.

 (c) En déduire la valeur de $z(x)$ sur $]0,\pi[$.

 (d) Montrer que l'on retrouve bien l'expression des solutions de (E) sur $]0,\pi[$ obtenues dans la partie A.

Correction :

Partie A :

(1) (a) La fonction $x \mapsto \frac{x}{2}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,\pi[$ et à valeurs dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. De plus, la fonction $x \mapsto \tan(x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, donc, par composition, la fonction $x \mapsto \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ est de classe $\mathbb{C}^\infty$ sur $]0,\pi[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
La fonction $x \mapsto \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ est de classe $\mathbb{C}^\infty$ sur $]0,\pi[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. De plus, la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc, par composition, la fonction $x \mapsto \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,\pi[$.
Les fonctions $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,\pi[$, donc par produit, la fonction $f : x \mapsto \sin(x)\ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,\pi[$.

(b) Soit $x \in]0,\pi[$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(x)\ln\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right) + \tfrac{\sin(x)\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \cos(x)\ln\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right) + \tfrac{\sin(x)}{2}\left(\tfrac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} + \tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

Donc , pour tout $x \in]0,\pi[$, on a

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\sin(x)\ln\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right) + \tfrac{\cos(x)\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &\quad + \tfrac{\cos(x)}{2}\left(\tfrac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} + \tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right) + \tfrac{\sin(x)}{2}\left(-\tfrac{1}{2}\tfrac{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} + \tfrac{1}{2}\left(1+\tan^2\left(\tfrac{x}{2}\right)\right)\right) \\ &= -\sin(x)\ln\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right) + \cos(x)\left(\tfrac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} + \tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right) + \tfrac{\sin(x)}{4}\left(\tan^2\left(\tfrac{x}{2}\right) - \tfrac{1}{\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right) \\ &= -\sin(x)\ln\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right) + \cos(x)\left(\tfrac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} + \tfrac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}\right) + \tfrac{\sin(x)}{4}\left(\tfrac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} - \tfrac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right) \\ &= -\sin(x)\ln\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right) + \cos(x)\left(\tfrac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}\right) + \tfrac{\sin(x)}{4}\left(\tfrac{\sin^4\left(\frac{x}{2}\right)-\cos^4\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right) \\ &= -\sin(x)\ln\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right) + \cos(x)\left(\tfrac{2}{\sin(x)}\right) + \tfrac{\sin(x)}{4}\left(\tfrac{4\left(\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)-\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)\left(\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{\sin^2(x)}\right) \\ &= -\sin(x)\ln\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right) + \tfrac{2\cos(x)}{\sin(x)} - \tfrac{\sin(x)\cos(x)}{\sin^2(x)} \\ &= -\sin(x)\ln\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right) + \tfrac{\cos(x)}{\sin(x)} \\ &= -f(x) + \tfrac{\cos(x)}{\sin(x)}. \end{aligned}$$

(2) On résoud l'équation homogène associée à (E) :

$$(E_0) : y''(x) + y(x) = 0.$$

L'équation caractéristique associée à (E_0) est $r^2+1=0$, qui admet pour solution les complexes i et $-i$. Ainsi, l'ensemble des solutions de (E_0) est

$$\mathcal{S}_0 = \left\{x \mapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x) \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

De plus, d'après la question (1)(b), f est une solution de (E), donc l'ensemble des solutions de (E) est

$$\mathcal{S} = \left\{x \mapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x) + \sin(x)\ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Partie B :

(3) (a) La fonction $x \mapsto \frac{x}{2}$ est dérivable sur $]0,\pi[$ et à valeur dans $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. De plus, la fonction $x \mapsto \tan(x)$ est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, donc, par composition, la fonction $x \mapsto \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ est dérivable sur $]0,\pi[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction $x \mapsto \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ est dérivable sur $]0,\pi[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. De plus, la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc, par composition, la fonction $g : x \mapsto \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$ est dérivable sur $]0,\pi[$.

(b) Pour tout $x \in]0,\pi[$, on a

$$\begin{aligned} g'(x) &= \tfrac{1}{2}\tfrac{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right) + \tfrac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} + \tfrac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right) \\ &= \tfrac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \tfrac{1}{\sin(x)}. \end{aligned}$$

Donc, une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sin(x)}$ est donnée par $x \mapsto \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$.

(4) (a) Soit $h : x \mapsto \frac{1}{\tan(x)}$. On a $\lim\limits_{x\mapsto \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\mapsto \frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$. Ainsi, par passage au quotient, on a

$$\lim_{x\mapsto \frac{\pi}{2}^-} h(x) = \lim_{x\mapsto \frac{\pi}{2}^+} h(x) = 0.$$

Donc, par existence et égalité des limites à gauche et à droite en $\frac{\pi}{2}$, la fonction h admet une limite finie (égale à 0) en $\frac{\pi}{2}$ et donc h est prolongeable par continuité en $\frac{\pi}{2}$.

(b) Pour tout $x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$, la fonction $x \mapsto \tan(x)$ est dérivable et ne s'annule pas, donc $\widetilde{h} : x \mapsto \frac{1}{\tan(x)}$ est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$. De plus, pour tout $x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$, on a

$$\widetilde{h}'(x) = -\frac{1+\tan^2(x)}{\tan^2(x)} = -1 - \frac{1}{\tan^2(x)}.$$

De la même manière que pour la question (4)(a), la fonction $\widetilde{h}'$ admet une limite finie en $\frac{\pi}{2}$ égale à -1 et donc, d'après le théorème de la limite de la dérivée, $\widetilde{h}$ est dérivable en $\frac{\pi}{2}$.

(c) D'après la question (4)(b), on a, pour tout $x \in]0,\pi[$,

$$\widetilde{g}'(x) = -1 - \frac{1}{\tan^2(x)} = -1 - \frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)} = -\frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\sin^2(x)} = -\frac{1}{\sin^2(x)}.$$

Ainsi, une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)}$ est $x \mapsto -\frac{1}{\tan(x)}$.

(5) (a) On pose $y(x) = z(x)\sin(x)$ sur $]0,\pi[$. On a alors, pour tout $x \in]0,\pi[$,

$$y'(x) = z'(x)\sin(x) + z(x)\cos(x) \quad \text{et} \quad y''(x) = z''(x)\sin(x) + 2z'(x)\cos(x) - z(x)\sin(x).$$

Ainsi, si y est solution de (E), alors on a

$$\begin{aligned} & y''(x) + y(x) = \tfrac{\cos(x)}{\sin(x)} \\ \Leftrightarrow\ & z''(x)\sin(x) + 2z'(x)\cos(x) - z(x)\sin(x) + z(x)\sin(x) = \tfrac{\cos(x)}{\sin(x)} \\ \Leftrightarrow\ & z''(x)\sin(x) + 2z'(x)\cos(x) = \tfrac{\cos(x)}{\sin(x)} \\ \Leftrightarrow\ & z''(x) + 2z'(x)\tfrac{\cos(x)}{\sin(x)} = \tfrac{\cos(x)}{\sin^2(x)}. \end{aligned}$$

Donc y est solution de (E) sur $]0,\pi[$ si et seulement si z' est solution de l'équation différentielle

$$(E') : \varphi'(x)(x) + 2\varphi'(x)\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}.$$

(b) Comme $\sin(x) > 0$ sur $]0,\pi[$, une primitive de $x \mapsto 2\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ est $x \mapsto 2\ln(\sin(x))$, donc l'ensemble des solutions, sur $]0,\pi[$, de l'équation homogène $(E_0') : \varphi'(x)(x)+2\varphi'(x)\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = 0$ associée à (E') est

$$\mathcal{S}_0' = \left\{x \mapsto \lambda e^{-2\ln(\sin(x))} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\} = \left\{x \mapsto \frac{\lambda}{\sin^2(x)} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

On applique à présent la méthode de la variation de la constante. Soit $\varphi : x \mapsto \frac{\lambda(x)}{\sin^2(x)}$ une solution de (E'), avec λ dérivable sur $]0,\pi[$. Pour tout $x \in]0,\pi[$, on a

$$\varphi'(x) = \frac{\lambda'(x)\sin^2(x) - 2\lambda(x)\cos(x)\sin(x)}{\sin^4(x)}.$$

On a alors, pour tout $x \in]0,\pi[$,

$$\begin{array}{ll} & \varphi'(x) + 2\varphi'(x)\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} \\ \Leftrightarrow & \frac{\lambda'(x)\sin^2(x)-2\lambda(x)\cos(x)\sin(x)}{\sin^4(x)} + 2\frac{\lambda(x)}{\sin^2(x)}\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} \\ \Leftrightarrow & \frac{\lambda'(x)\sin^2(x)}{\sin^4(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} \\ \Leftrightarrow & \lambda'(x) = \cos(x). \end{array}$$

Une primitive de $x \mapsto \cos(x)$ étant $x \mapsto \sin(x)$, une solution particulière de (E') est $\varphi : x \mapsto \frac{1}{\sin(x)}$. Ainsi, l'ensemble des solutions de (E') sur $]0,\pi[$ est

$$\mathcal{S}' = \left\{x \mapsto \frac{\lambda}{\sin^2(x)} + \frac{1}{\sin(x)} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

(c) D'après la question (5)(a), y est solution de (E) si et seulement si z' est solution de (E'). Ainsi, d'après la question (5)(b), il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que, pour tout $x \in]0,\pi[$, $z'(x) = \frac{\lambda}{\sin^2(x)} + \frac{1}{\sin(x)}$. On en déduit des questions (3)(b) et (4)(c) que, pour tout $x \in]0,\pi[$ il existe $\mu \in \mathbb{R}$, tel que $z(x) = -\frac{\lambda}{\tan(x)} + \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \mu$.

(d) D'après la question (5)(a), $y : x \mapsto z(x)\sin(x)$ est solution de (E) si et seulement si z' est solution de (E'). Or, d'après la question (5)(c), z' est solution de (E') si et seulement si, pour tout $x \in]0,\pi[$, $z(x) = -\frac{\lambda}{\tan(x)} + \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \mu$. Ainsi, l'ensemble des solutions de (E) est

$$\begin{array}{lll} \mathcal{S} & = & \left\{\left(-\frac{\lambda}{\tan(x)} + \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \mu\right)\sin(x) \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ & = & \left\{x \mapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x) + \sin(x)\ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}. \end{array}$$

On retrouve bien ce que l'on a trouvé à la question (2).