Problème :

Dans ce problème, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0, \pi]$,

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad D_n(t) \mapsto 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kt).$$

(1) (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0, \pi]$, on a

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}.$$

(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in]0, \pi]$, on a

$$D_n(t) = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

(c) Calculer $D_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(2) (a) Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(kt)dt = \frac{1}{k^2}.$$

(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$B_n = \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \frac{D_n(t) - 1}{2} dt.$$

(c) Déterminer la valeur de

$$\int_0^{\pi} \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right) dt.$$

(d) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{\pi^2}{6} - B_n = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right) D_n(t)dt.$$

(e) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{\pi^2}{6} - B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\sin(t)} \left(2 - \frac{2t}{\pi}\right) \sin((2n+1)t)dt.$$

(3) On suppose que la fonction $f : t \mapsto \frac{t}{\sin(t)}\left(2 - \frac{2t}{\pi}\right)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. À l'aide d'une intégration par partie, montrer que

$$\lim_{n \mapsto +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \sin((2n+1)t)dt = 0.$$

(4) En déduire la limite de la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Correction :

(1) (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0, \pi]$, on a, d'après la formule d'Euler,

$$\begin{aligned} \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} &= 1 + \sum_{k=1}^{n} e^{ikt} + \sum_{k=-n}^{-1} e^{ikt} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} e^{ikt} + \sum_{k=1}^{n} e^{-ikt} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} e^{ikt} + e^{-ikt} \\ &= 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = D_n(t). \end{aligned}$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in]0, \pi]$, on a, d'après la question (1)(a),

$$\begin{aligned} D_n(t) &= \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} \\ &= \sum_{k=-n}^{n} \left(e^{it}\right)^k \\ &= e^{-int} \tfrac{1-e^{i(2n+1)t}}{1-e^{it}} \\ &= \tfrac{e^{-int} e^{\frac{i(2n+1)t}{2}}}{e^{\frac{it}{2}}} \tfrac{e^{-\frac{i(2n+1)t}{2}} - e^{\frac{i(2n+1)t}{2}}}{e^{-\frac{it}{2}} - e^{\frac{it}{2}}} \\ &= \tfrac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}. \end{aligned}$$

(c) Par substitution, on a $\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) \underset{t\mapsto 0}{\sim} \frac{2n+1}{2}t$ et $\sin\left(\frac{t}{2}\right) \underset{t\mapsto 0}{\sim} \frac{t}{2}$, donc $D_n(t) \underset{t\mapsto 0}{\sim} 2n+1$ et $D_n(0) = 2n+1$.

(2) (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, les fonctions $t \mapsto \frac{t^2}{2\pi} - t$ et $t \mapsto \cos(kt)$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, \pi]$, donc par intégration par parties, on a

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \left(\tfrac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(kt)dt &= \left[\left(\tfrac{t^2}{2\pi} - t\right)\tfrac{\sin(kt)}{k}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \left(\tfrac{t}{\pi} - 1\right)\tfrac{\sin(kt)}{k}dt \\ &= -\tfrac{1}{k}\left(\left[-\left(\tfrac{t}{\pi} - 1\right)\tfrac{\cos(kt)}{k}\right]_0^\pi - \int_0^\pi -\tfrac{\cos(kt)}{k}dt\right) \\ &= \tfrac{1}{k^2}\left(1 - \left[\tfrac{\sin(kt)}{k}\right]_0^\pi\right) \\ &= \tfrac{1}{k^2}. \end{aligned}$$

(b) D'après (2)(a) et le fait que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0, \pi]$, on a $\sum\limits_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{D_n(t)-1}{2}$, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(kt)dt = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)dt = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\frac{D_n(t)-1}{2}dt.$$

(c) On a

$$\int_0^\pi \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right)dt = \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6\pi}\right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{3}.$$

(d) D'après (2)(b) et (2)(c), on a

$$\begin{aligned} & B_n = \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \frac{D_n(t)-1}{2} dt \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right) dt - B_n = \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right) D_n(t) dt \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{\pi^2}{6} - B_n = \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right) D_n(t) dt. \end{aligned}$$

(e) D'après la question (1)(b), on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in]0, \pi]$, $D_n(t) = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a, d'après la question (2)(d),

$$\frac{\pi^2}{6} - B_n = \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right) \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} dt.$$

Ainsi, en posant le changement de variable $u = \frac{t}{2}$, on a

$$\frac{\pi^2}{6} - B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2u - \frac{(2u)^2}{2\pi}\right) \frac{\sin((2n+1)u)}{\sin(u)} du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u}{\sin(u)} \left(2 - \frac{2u}{\pi}\right) \sin((2n+1)u) du.$$

(3) Comme la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, sa dérivée est bornée et il existe $M \geq 0$, tel que $\max_{t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]} |f'(t)| \leq M$. De plus, les fonctions $t \mapsto f(t)$ et $t \mapsto \sin((2n+1)t)$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on peut a par intégration par parties

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin((2n+1)t) dt &= \left[-f(t)\frac{\cos((2n+1)t)}{2n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -f'(t)\frac{\cos((2n+1)t)}{2n+1} dt \\ &= \frac{f(0)}{2n+1} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f'(t)\cos((2n+1)t)}{2n+1} dt \end{aligned}$$

ainsi, par inégalité triangulaire, on a

$$\begin{aligned} \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin((2n+1)t) dt\right| &\leq \frac{|f(0)|}{2n+1} + \frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} |f'(t)||\cos((2n+1)t)| dt \\ &\leq \frac{|f(0)|}{2n+1} + \frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} M dt \\ &= \frac{|f(0)|}{2n+1} + \frac{1}{2n+1}\frac{M\pi}{2} \underset{n \mapsto +\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{n \mapsto +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin((2n+1)t) dt = 0.$$

(4) D'après les questions (2)(e) et (3), on a $\lim_{n \mapsto +\infty} \frac{\pi^2}{6} - B_n = 0$ et donc

$$\lim_{n \mapsto +\infty} B_n = \frac{\pi^2}{6}.$$