Devoir maison 3

Mathématiques

À rendre pour le lundi 02 Mars 2026

Problème 1 : Marche aléatoire

Une puce se déplace à chaque unité de temps sur les quatre sommets d'un carré, nommés A, B, C et D, selon le protocole suivant :

- À l'instant 0, la puce se situe sur le sommet A.
- Si à un instant $n \in \mathbb{N}$, la puce se situe sur le sommet A, alors elle sera, à l'instant $n+1$ sur le sommet A avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et sur le sommet C avec la probabilité $\frac{1}{3}$.
- Si à un instant $n \in \mathbb{N}$, la puce se situe sur le sommet B, alors elle sera, à l'instant $n+1$ sur le sommet A avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et sur le sommet C avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
- Si à un instant $n \in \mathbb{N}$, la puce se situe sur le sommet C, alors elle sera, à l'instant $n+1$ sur le sommet B avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et sur le sommet D avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
- Si à un instant $n \in \mathbb{N}$, la puce se situe sur le sommet D, alors elle sera, à l'instant $n+1$ sur le sommet D avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et sur le sommet B avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

Pour $X \in \{A, B, C, D\}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose l'événement X_n : "La puce se trouve au sommet X à l'instant n". De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \mathbb{P}(A_n)$, $b_n = \mathbb{P}(B_n)$, $c_n = \mathbb{P}(C_n)$ et $d_n = \mathbb{P}(D_n)$.

(1) Donner les valeurs de a_0, b_0, c_0 et d_0.

(2) (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n.$$

(b) Exprimer de même b_{n+1}, c_{n+1} et d_{n+1} en fonction de a_n, b_n, c_n et d_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer la valeur de $a_n + b_n + c_n + d_n$.

(4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}, \ V = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donner une relation entre U_{n+1}, U_n, M et V.

(5) (a) Déterminer l'existence d'une matrice $L \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, tel que $L = ML + V$.

(b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U_n = M^n(U_0 - L) + L.$$

(6) On pose

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

(b) Montrer que $M = PDP^{-1}$.
(c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = PD^nP^{-1}$.

(7) (a) Donner une expression de U_n en fonction de n.
(b) En déduire les limites des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
(c) En déduire la limite de la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Problème 2 : Étude des nombres harmoniques

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit le n-ième nombre harmonique par

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

(1) Soit $k \geq 2$.
(a) En utilisant le fait que, si $x \in [k, k+1]$, alors $\frac{1}{x} \in \left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$, montrer que

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_{k}^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}.$$

(b) En déduire que

$$\int_{k}^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x} dx.$$

(2) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n).$$

(3) Montrer que $H_n \sim \ln(n)$ et en déduire la limite de la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

(4) On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par

$$u_n = H_n - \ln(n) \quad \text{et} \quad v_n = H_n - \ln(n+1).$$

(a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont deux suites adjacentes.
(b) En déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers une même limite positive. On notera cette limite γ.

(5) (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq H_n - \ln(n) - \gamma \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

(b) En déduire que

$$H_n = \ln(n) + \gamma + o(1).$$