4.) Aspect énergétique

éq maille :

$e = U_R + U_L$

$\left.\begin{array}{l} U_L = L\dfrac{di}{dt} \\ U_R = Ri \end{array}\right)$ en CVR $\Rightarrow e = L\dfrac{di}{dt} + Ri$.

$\Rightarrow \underbrace{ei}_{CVG} = Li\dfrac{di}{dt} + Ri^2$.

$P_{\text{fournie par le géné}} = P_{\text{reçue par } L} + P_{\text{reçue par } R}$

$\Rightarrow ei = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}Li^2\right) + Ri^2$.

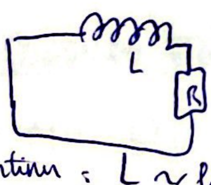
$\Rightarrow \int_0^t ei\,dt = \int_0^t \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}Li^2\right)dt + \int_0^t Ri^2\,dt$..

$\mathcal{E}_{\text{fournie géné}} = \mathcal{E}_{\text{reçue } L} + \mathcal{E}_{\text{reçue } R}$.

$\mathcal{E}_{\text{reçue } L} = \int_0^t \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}Li^2\right) = \left[\dfrac{1}{2}Li^2\right]_0^{+\infty}$

pour $t<0$,

$e = 0$



Régime permanent continu : $L \sim$ fil.

donc $U_L = 0$.

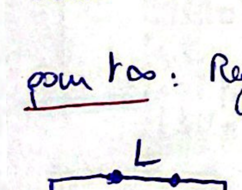
or $U_L + U_R = 0$ donc $U_R = 0$.

donc $Ri = 0 \Rightarrow i = 0$.

$\mathcal{E}_L = \dfrac{1}{2}Li^2$ est continue donc i aussi

donc $i(t=0^-) = i(t=0^+) \Rightarrow \boxed{i(t=0^+) = 0}$

pour $t\infty$: Régime permanent c° donc $L \sim$ fil

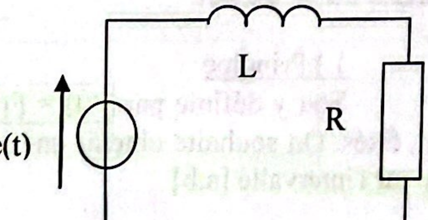


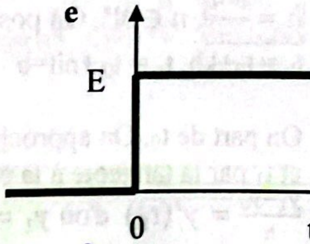
$U_L = 0$

éq maille : $E = U_L + U_R$.

$\Rightarrow Ri = E$

$\Rightarrow \boxed{i = \dfrac{E}{R}}$ à $t\infty$.





$\mathcal{E}_{L\,0\to+\infty} = \dfrac{1}{2}L\left[i^2(+\infty) - i^2(0^+)\right]$.

$\boxed{\mathcal{E}_{L\,0\to+\infty} = \dfrac{1}{2}L\dfrac{E^2}{R^2}}$ stockée dans la bobine

$\mathcal{E}_{\text{fournie par géné}} = \int_0^t Ei\,dt = E\int_0^t i\,dt$.

Après calculs p11 :

$i(t) = \dfrac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$.

$\int_0^t i(t)\,dt = \dfrac{E}{R}\int_0^{t\infty}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)dt$

$\Rightarrow E\int_0^{t\infty} i(t)\,dt = \dfrac{E^2}{R}\left[t + \tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right]_0^{t\infty}$.

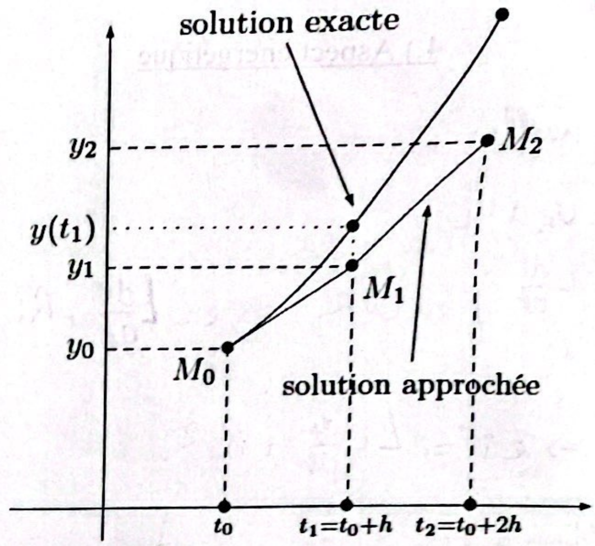
$\Rightarrow \mathcal{E}_{\text{géné}} = \dfrac{E^2}{R}\left[t + \tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right]_0^{+\infty} \to +\infty$

donc $\mathcal{E}_R = \mathcal{E}_{\text{géné}} - \mathcal{E}_L \to +\infty$.

III Méthode d'Euler

1.) Principe

Soit y définie par $\boxed{y'(t) = F(y(t), t)}$ et $y(t_0)=y_0$ avec t_0 et y_0 fixés. On souhaite obtenir une approximation de la fonction y sur l'intervalle [a,b]



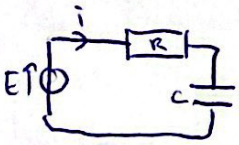
On subdivise l'intervalle [a,b] en n petits segments de longueur $\boxed{h = \frac{b-a}{n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$. On pose alors $t_0 = a$, $t_1 = t_0+h$, $t_2 = t_0 + 2h$... $t_k = t_0+kh$, $t_n = t_0 +nh=b$

On part de t_0. On approche le petit morceau de courbe entre t_0 et t_1 par la tangente à la courbe au point d'abscisse t_0. On a $\frac{y_1-y_0}{h} = y'(t_0)$ d'où $y_1 = y_0 + hy'(t_0)$.

Soit encore $y_1 = y_0 + hF(y_0, t_0)$

De manière générale, on pose pour tout k : $\frac{y_{k+1}-y_k}{h} = y'(t_k)$ d'où $y_{k+1} = y_k + hy'(t_k) = y_k + hF(y_k, t_k)$

Pour l'équation différentielle de la charge du circuit RC :



$E = Ri + U_c$ où $i = C\frac{du_c}{dt}$

$\Rightarrow E = RC\frac{du_c}{dt} + U_c$.

$\Rightarrow \frac{du_c}{dt} + \frac{1}{RC}U_c = \frac{E}{RC}$.

$\tau = RC$, $\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{\tau}U_c = \frac{E}{\tau}$.

$\Rightarrow \frac{du_c}{dt} = \frac{E-U_c}{\tau}$ ⊕

****-

eq. Tang. courbe.

$\left(\frac{du_c}{dt}\right)(t_k) = \frac{U_c(t_{k+1}) - U_c(t_k)}{t_{k+1} - t_k}$

$\Rightarrow U_c(t_{k+1}) = \left(\left(\frac{du_c}{dt}\right)(t_k)\right) \times (t_{k+1} - t_k) + U_c(t_k)$, $h = t_{k+1} - t_k$

car $\frac{du_c}{dt} = \frac{E-U_c}{\tau}$ ⊕

$\Rightarrow \boxed{U_c(t_{k+1}) = \frac{E-U_c(t_k)}{\tau} \times h + U_c(t_k)}$

2.) Mise en œuvre

```
import matplotlib.pyplot as plt      } import des bibliothèques
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint


#l'équadiff s'écrit: u'(t)=f(u(t),t) avec f:(u,t)->(E - u)/tau
#la relation de récurrence s'écrit: u_{k+1} = u_k + h*f(u_k, t_k)

def ordre1_euler(tau, E, n):
    t = 0
    u = U0
    les_t = [0]   liste des temps
    les_u = [U0]   liste des tensions.
    h = tmax / n   le pas.
    for i in range(n):   i varie de 0 à n-1.
        #les_t contient [t0,...,ti] et les_u contient [u0,...,ui]
        u = u + h * (E - u) / tau
        t = t + h
        les_u.append(u)   } on ajoute ce qu'on a calculé dans leur liste respective.
        les_t.append(t)
    return(les_t, les_u)
```

* * * *

! khôlles

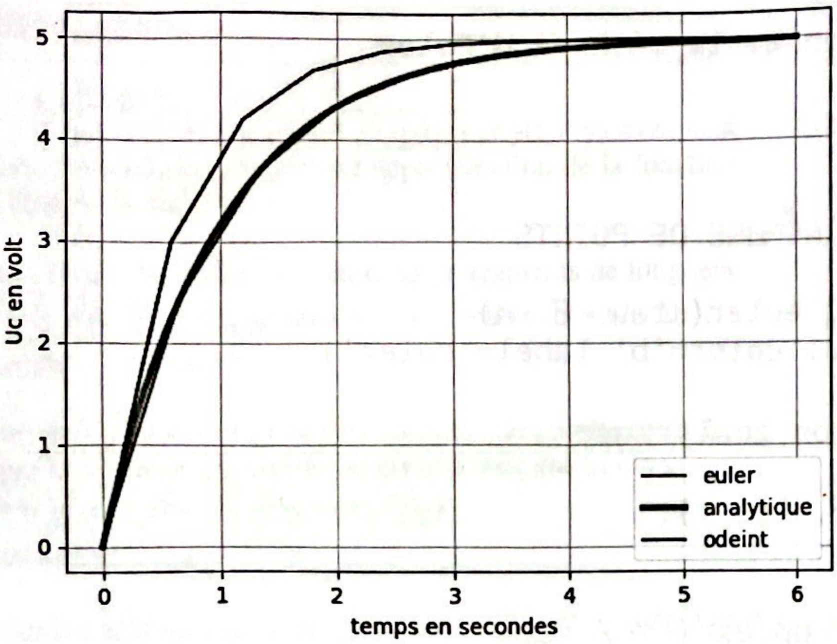
```
##Tracé de la solution de la méthode d'Euler
E=5
U0=0
tau=1
tmax=6*tau
n = 10  #MODIFIER LE NOMBRE DE POINTS

les_t, les_u = ordre1_euler( tau, E, n)
plt.plot(les_t, les_u, color='b',label='euler')
```

appel de la fonction.

tracé abscisse ordonée

```
##ajout de la solution analytique

def ordre1_th(tau, E, les_t):
    les_u=[]
    for t in les_t:
        u=E +(U0-E)* np.exp(-t / tau)
        les_u.append(u)
    return(les_u)

#Autre écriture plus condensée qui donne le même résultat:
# def ordre1_th(tau, E, les_t):
#     return([E +(U0-E)* np.exp(-t / tau) for t in les_t])

les_t = np.linspace(0, tmax, 100)
les_u = ordre1_th(tau, E, les_t)

plt.plot(les_t, les_u, color='r', lw = 3, label = 'analytique')

##ajout de la solution obtenue par odeint

def f(u, t):

    return( (E - u) / tau)

les_t = np.linspace(0, tmax, n)
les_u = odeint(f, U0, les_t)
plt.plot(les_t, les_u, color = 'g', label = 'odeint')

plt.savefig('figure1.pdf')
plt.xlabel('temps en secondes')
plt.ylabel('Uc en volt')
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```

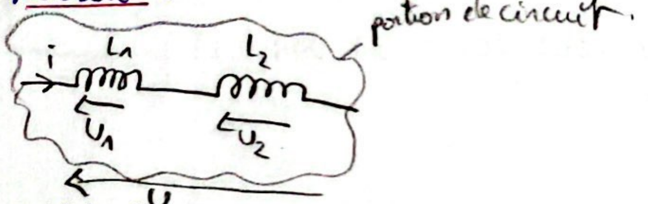
pour montrer la courbe



IV Application directe : Association des bobines et condensateurs parfaits

1) Association de bobines idéales :

a) en série :



Loi d'additivité des tensions :

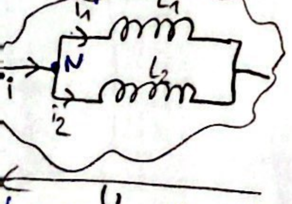
$U = u_1 + U_2$.

$\begin{cases} u_1 = L_1 \frac{di}{dt} \\ U_2 = L_2 \frac{di}{dt} \end{cases}$ en CVR

$U = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} = \frac{di}{dt}(L_1 + L_2)$

donc $u = L_{eq} \times \frac{di}{dt}$ où $L_{eq} = L_1 + L_2$.

b) en parallèle :



Loi des noeuds en N : $i = i_1 + i_2$ ①

CVR $\begin{cases} u = L_1 \frac{di_1}{dt} \Rightarrow \frac{di_1}{dt} = \frac{U}{L_1} \\ u = L_2 \frac{di_2}{dt} \Rightarrow \frac{di_2}{dt} = \frac{U}{L_2} \end{cases}$

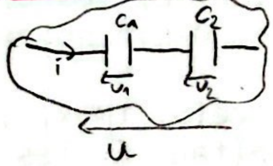
① donc, $\frac{di}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{U}{L_1} + \frac{U}{L_2} = U\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)$

donc $\frac{di}{dt} = \frac{U}{L_{eq}}$ où $L_{eq} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$.

donc $u = L_{eq} \times \frac{di}{dt}$

2) Association de condensateurs parfaits

a) en série :



$u = u_1 + u_2$.

$\begin{cases} i = C_1 \times \frac{du_{C_1}}{dt} \Rightarrow \frac{du_{C_1}}{dt} = \frac{i}{C_1} \\ i = C_2 \times \frac{du_{C_2}}{dt} \Rightarrow \frac{du_{C_2}}{dt} = \frac{i}{C_2} \end{cases}$

$\frac{du}{dt} = \frac{du_1}{dt} + \frac{du_2}{dt} \Rightarrow \frac{du}{dt} = \frac{i}{C_1} + \frac{i}{C_2}$.

$\Rightarrow \frac{du}{dt} = i\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$.

$\Rightarrow \frac{du}{dt} = i \times C_{eq}$ avec $C_{eq} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$.

$\Rightarrow i = C_{eq} \times \frac{du}{dt}$.

b) parallèle :

$i = i_1 + i_2$. où $i_1 = C_1 \frac{du}{dt}$ et $i_2 = C_2 \frac{du}{dt}$.

$\Rightarrow i = C_1 \frac{du}{dt} + C_2 \frac{du}{dt}$.

$\Rightarrow i = C_{eq} \frac{du}{dt}$. avec $C_{eq} = C_1 + C_2$.