
PROGRAMMES 5 et 6.

PROGRAMME 5 : du 16/10 au 20/10

Reprise des sommes

Nouvelles fonctions usuelles

- Résultat sur la dérivabilité d'une fonction réciproque.
- Définition rigoureuse de Arcsin, dérivabilité et dérivée
- Définition rigoureuse de Arccos, dérivabilité et dérivée
- Définition rigoureuse de Arctan, dérivabilité et dérivée
- Définition de ch, sh, écriture de $\exp(x)$ en fonction de $\operatorname{ch}(x)$ et $\operatorname{sh}(x)$, formule reliant $\operatorname{ch}^2(x)$ et $\operatorname{sh}^2(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Dérivées, variations et graphe.

Remarque aux colleurs : La seule formule de trigonométrie hyperbolique à connaître est $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ pour $x \in \mathbb{R}$. La fonction tangente hyperbolique et les fonctions hyperboliques réciproques sont hors programme.

Un énoncé au choix à demander

- Sommes usuelles : $\sum_{k=0}^n k, \sum_{k=0}^n k^2, \sum_{k=0}^n k^3$ où $n \in \mathbb{N}$
- $\sum_{k=0}^n q^k$ où $n \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{R}$ puis $\sum_{k=p}^n q^k$ pour $0 \leq p \leq n$
- Factorisation de $a^n - b^n, a^3 - b^3, a^3 + b^3$
- Formule du binôme de Newton
- Écrire de deux manières $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j}$
- Définition rigoureuse de Arcsin, dérivabilité et dérivée
- Définition rigoureuse de Arccos, dérivabilité et dérivée
- Définition rigoureuse de Arctan, dérivabilité et dérivée
- Définition de ch, sh, écriture de $\exp(x)$ en fonction de $\operatorname{ch}(x)$ et $\operatorname{sh}(x)$, formule reliant $\operatorname{ch}^2(x)$ et $\operatorname{sh}^2(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$

Démonstrations

- Formule du binôme de Newton.
- Dérivabilité de Arcsin et dérivée.
- Formule donnant $\text{Arctan } x + \text{Arctan } \left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.

PROGRAMME 6 : du 06/11 au 09/11

Reprise des nouvelles fonctions usuelles

Complexes

- ★ Parties réelle et imaginaire. Opérations sur les nombres complexes.
Conjugaison, compatibilité avec les opérations.
- ★ Module d'un nombre complexe. Relation $|z|^2 = z\bar{z}$, module d'un produit, d'un quotient.
Inégalité triangulaire, cas d'égalité.
- ★ Nombres complexes de module 1 : Notation \mathbb{U} . Définition de $e^{i\theta}$ pour θ réel. Si θ et θ' sont deux réels, alors : $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} e^{i\theta'}$.
Formules d'Euler : $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$, $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$
Formule de Moivre.
Applications à la trigonométrie : Linéarisation, opération inverse.
- ★ Écriture d'un nombre complexe non nul sous la forme $re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
Arguments d'un nombre complexe non nul. Notation $\text{Arg}(z) \equiv \theta(2\pi)$.
Factorisation de $e^{ip} \pm e^{iq}$, $1 \pm e^{i\theta}$.
Calcul de $\sum_{k=0}^n \cos(kt)$ et $\sum_{k=0}^n \sin(kt)$.
Argument d'un produit, d'un quotient.
- ★ Équation du second degré : Racines carrées d'un nombre complexe.
Résolution des équations du second degré, discriminant.
Somme et produit des racines d'une équation du second degré.

Question de savoir-faire

On demandera à chaque étudiant, en plus de la preuve et de l'énoncé, une linéarisation ou une « dé-linéarisation » par passage en complexes.

Un énoncé au choix à demander

- Définition rigoureuse de Arcsin, dérivabilité et dérivée
- Définition rigoureuse de Arccos, dérivabilité et dérivée
- Définition rigoureuse de Arctan, dérivabilité et dérivée
- Définition de ch, sh, écriture de $\exp(x)$ en fonction de $\operatorname{ch}(x)$ et $\operatorname{sh}(x)$, formule reliant $\operatorname{ch}^2(x)$ et $\operatorname{sh}^2(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$
- Définition du module de $z \in \mathbb{C}$ (2 expressions à donner)
- Donner 2 caractérisations pour $z \in \mathbb{R}$, 2 caractérisations pour $z \in i\mathbb{R}$
- Propriétés de la conjugaison (somme, différence, produit, quotient)
- Propriétés du module (produit, quotient)
- Traduire $|z| = 1$ de trois manières ($x^2 + y^2 = 1$ si $x = \operatorname{Re}(z), y = \operatorname{Im}(z)$, $\bar{z} = \frac{1}{z}, \exists \theta \in \mathbb{R}, z = e^{i\theta}$)
- Inégalité triangulaire
- Formules d'Euler
- Propriétés algébrique des $e^{i\theta}$, formule de Moivre
- Écriture trigonométrique d'un complexe non nul
- Résultat sur les racines carrées d'un complexe non nul
- Solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ avec a, b, c complexes, $a \neq 0$
- Relations racines/coefficients pour une équation de degré 2

Démonstrations

- Formule donnant $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{x} \right)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.
- Pour tous complexes z_1 et z_2 , $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
- Calculer $\sum_{k=0}^n \cos(kt)$ et $\sum_{k=0}^n \sin(kt)$ où $t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.