Signaux Electriques SE3 L'oscillateur harmonique

Introduction : définition de l'oscillateur harmonique

On appelle oscillateur harmonique un système physique décrit par une grandeur x(t) dépendant du temps et vérifiant une équation différentielle de la forme: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ où ω_0 est une constante réelle positive qui est appelée pulsation propre de l'oscillateur harmonique et qui s'exprime en rad.s^{-1}.

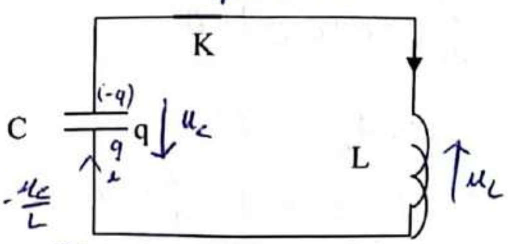
Solution $x(t) = a\cos(\omega_0.t)+b\sin(\omega_0.t)$ a et b étant constantes, déterminées par les conditions initiales.
$x(t)= A\cos(\omega_0.t+\varphi)$ A est l'amplitude, positive et φ l'avance de phase à l'origine.
A et φ sont constantes, déterminées par les conditions initiales.

$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$

I Oscillations électrique : exemple du circuit LC

1.) Equation différentielle et résolution

Le condensateur est initialement chargé, et K est ouvert depuis longtemps. A t = 0, on ferme l'interrupteur K.



$u_L + u_C = 0 \Rightarrow L\frac{di}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{di}{dt} = -\frac{u_c}{L}$

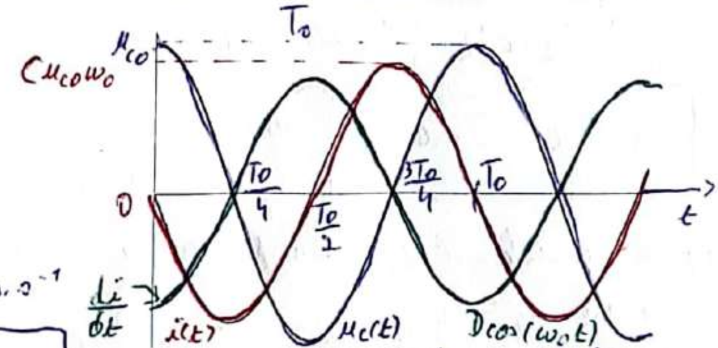
Pour $t<0$ $u_C = u_{C0}$ $i=0$

Pour $t>0$, équa de maille ① $u_c + u_L = 0$

Or $u_L = L\frac{di}{dt}$ et $i = C\frac{du_c}{dt}$

$\Rightarrow u_c + L\frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow u_c + LC\frac{d^2u_c}{dt^2} = 0$

$\boxed{\Rightarrow \frac{d^2u_C}{dt} + \frac{1}{LC}u_c = 0}$ oscillateur harmonique



$\hookrightarrow u_c(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ où $\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$ pulsation propre de l'oscillateur

ω_0 : rds.s^{-1} ; φ : rds

où $u_c(t) = a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t)$

$\mathcal{E}_C = \frac{1}{2}Cu_c^2$ est continue

$\Rightarrow u_c(0^-) = u_c(0^+) = u_{C0}$

① $\Rightarrow u_c(0^+) = a\cos(0) + b\sin(0) = a = u_{C0}$

$\boxed{u_c(t) = u_{C0}\cos(\omega_0 t)}$

② $\Rightarrow \boxed{i(t) = -Cu_{C0}\,\omega_0\sin(\omega_0 t)}$

$\mathcal{E}_L = \frac{1}{2}Li^2$ est continue

$\Rightarrow i(0^-) = \boxed{i(0^+) = 0}$

$i = C\frac{du_c}{dt} = C\frac{d}{dt} = C\frac{d}{dt}\left(a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t)\right)$

$i = C\left[-a\omega_0\sin(\omega_0 t) + b\,\omega_0\cos(\omega_0 t)\right]$

Rq: $[\cos(\alpha t)]' = \alpha \times (-\sin(\alpha t))$
$[\sin(\alpha t)]' = \alpha\cos(\alpha t)$

Rq: $\cos(\theta)$ est périodique de période 2π
$\cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta)$
$\cos(\omega_0 t + 2\pi) = \cos\left(\omega_0\left(t + \frac{2\pi}{\omega_0}\right)\right)$
$= \cos(\omega_0 t)$

$\cos(\omega_0 t)$ est périodique de période propre

$\cdot\ i(0^+) = C\left[-a\omega_0\sin(0) + b\,\omega_0\cos(0)\right]$

$* \ T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ (2π → rad, ω_0 → rad.s^{-1}) $\boxed{f_0 = \frac{1}{T_0}}$ → fréquence propre

$i(0^+) = b\,\omega_0 C = 0 \Rightarrow \boxed{b = 0}$

2.) Bilan de puissance et d'énergie

① $u_C + u_L = 0$

$(\times i)$ $u_C i + u_L i = 0$

$\boxed{P_{\text{reçue par } C} + P_{\text{reçue par } L} = 0}$ (en CVR)

$i = C\dfrac{du_C}{dt}$ et $u_L = L\dfrac{di}{dt}$

$\Rightarrow C u_C \dfrac{du_C}{dt} + L i \dfrac{di}{dt} = 0$

$\Rightarrow \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2} C u_C^2\right) + \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2} L i^2\right) = 0$

$\Rightarrow \boxed{\dfrac{d\mathcal{E}_C}{dt} + \dfrac{d\mathcal{E}_L}{dt} = 0}$

$\Rightarrow \dfrac{d}{dt}(\mathcal{E}_C + \mathcal{E}_L) = 0$

$\Rightarrow \mathcal{E}_C + \mathcal{E}_L = \text{cte}$

à $t = 0^+$ $\mathcal{E}_C(0^+) = \dfrac{1}{2} C u_{C0}^2$

$\mathcal{E}_L(0^+) = \dfrac{1}{2} L i^2(0^+) = 0$

$\Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_C + \mathcal{E}_L = \dfrac{1}{2} C u_0^2}$ $\forall t$

Rq : en réalité, il y a dissipation d'énergie par effet Joule dans les fils de résistance non nulle. cf SE4

$\Rightarrow$ L'amplitude des oscillations décroît au cours du temps

II Oscillations mécaniques : exemple du ressort horizontal

1.) Etude dynamique : Deuxième loi de Newton

https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Meca/Oscillateurs/oscillateur_horizontal.php

Anneau, accolé à un ressort, qui coulisse sans frottements le long d'une tige horizontale.

Système : {anneau suffisamment petit pour être assimilé à son centre M de masse m}
étude dans le référentiel terrestre galiléen.

Forces appliquées à l'anneau

Poids $\vec{P} = m\vec{g}$

Réaction du support $\vec{R_N} \perp$
au support en l'absence de frottements (ici $\vec{R_N}$ axe)

Force de rappel du ressort

$$\boxed{F_r = -k(\ell - \ell_0)\vec{e_x}}$$

⚠ $\|\vec{x}\| = x \quad \|\vec{u_x}\| = \|\vec{e_x}\| = 1$

ℓ_0 : longueur du ressort à vide

ℓ : longueur du ressort

k : constante de raideur du ressort

Rq : $\ell > \ell_0$ $\quad \vec{F_r}$ est en sens inverse de $\vec{e_x}$ (ressort étiré)

$\ell < \ell_0$ $\quad \vec{F_r}$ dans le sens de $\vec{e_x}$ (ressort comprimé)

⚠ $\vec{e_x}$ choisi dans le sens de l'étirement.

Rq : k indique la difficulté à étirer le ressort

A l'équilibre $\sum \vec{F} = \vec{0}$

(1) $\vec{P} + \vec{R_N} + \vec{F_r} = \vec{0}$

$\vec{P} = -mg\vec{e_z} \quad \vec{R_N} = R_N\vec{e_z}$

on projette (1) sur $\vec{e_z}$: $-mg + R_N = 0 \Rightarrow \boxed{R_N = mg}$

sur $\vec{e_x}$: $-k(\ell_{eq} - \ell_0) = 0 \Rightarrow \boxed{\ell_{eq} = \ell_0}$ $\quad \ell_{eq}$: longueur à l'équilibre

Rq : $l_{eq} > l_0$ pour un ressort selon la verticale

2ème loi de Newton : $m\vec{a}_M = \sum \vec{F}$

vecteur position $\vec{OM} = x\vec{e_x}$ où $x = l - l_0$ x dépend du temps, l dépend du temps

$\vec{v_M} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{x}\vec{e_x}$ où $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$

$\vec{a_M} = \frac{d\vec{v_M}}{dt} = \ddot{x}\vec{e_x}$ où $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$

$m\vec{a_M} = \vec{P} + \vec{R_N} + \vec{F_x}$

projection sur O_z : $R_N - mg = 0 \Rightarrow R_N = mg$

projection sur O_x : $m\ddot{x} = -k(l - l_0)$

$\Rightarrow m\ddot{x} = -kx$

$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

Oscillateur harmonique : $\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$ (1) équa diff du mouvement

où $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$ $rad.s^{-1}$ pulsation propre

*2 Pour le cas $x(t=0)$ et $v(t=0) = v_0 \neq 0$ et $v_0 > 0$ Amplitude : $\frac{v_0}{\omega_0}$

$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$

Pour $x(0) = x_0 \neq 0$ et $v_0 = v_0 \neq 0$ $x_0 > 0$

$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

$\boxed{x(t) = a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t)}$ (2)

CI : à $t = 0$, on étire le ressort et on le lâche sous conditions initiales

$t = 0$ $x(t=0) = l_1 - l_0 > 0$

$v(t=0) = 0$

On note $x(t=0) = x_0$

$x(t=0) = a\cos(0) + b\sin(0) = a$

On a $x(t=0) = x_0 \Rightarrow \boxed{a = x_0}$

$v(t) = \frac{dx}{dt} = -a\omega_0\sin(\omega_0 t) + b\omega_0\cos(\omega_0 t)$

$v(0) = -a\omega_0\sin(0) + b\omega_0\cos(0)$

$v(0) = b\omega_0$

or $v(0) = 0$ donc $\boxed{b = 0}$

$\boxed{x(t) = x_0\cos(\omega_0)}$

$\boxed{v(t) = -x_0\omega_0\sin(\omega_0 t)}$

$\boxed{a(t) = \frac{dv}{dt} = -x_0\omega_0^2\cos(\omega_0 t)}$

* Rq : $v(t=0) = \left(\frac{dx}{dt}\right)(t=0)$ donne la pente de la tangente à l'origine.

Période propre des oscillations : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

fréquence propre des oscillations : $f_0 = \frac{1}{T_0}$ ↳ Hz

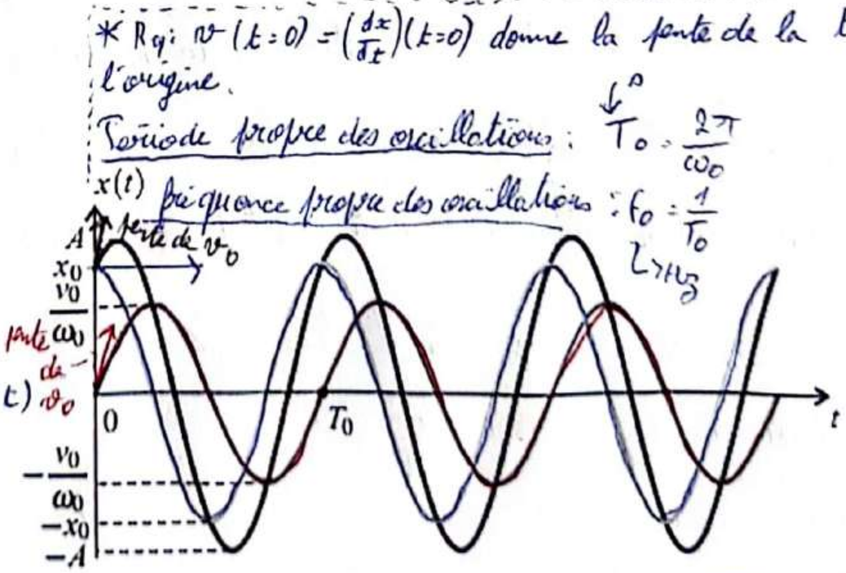


Figure 1.2 – Représentation graphique de $x(t)$ en fonction de t. En gris clair : cas $x_0 \neq 0$ et $v_0 = 0$; en gris foncé : cas $x_0 = 0$ et $v_0 \neq 0$; en noir : cas $x_0 \neq 0$ et $v_0 \neq 0$. La période des oscillations est $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ (voir paragraphe 2).

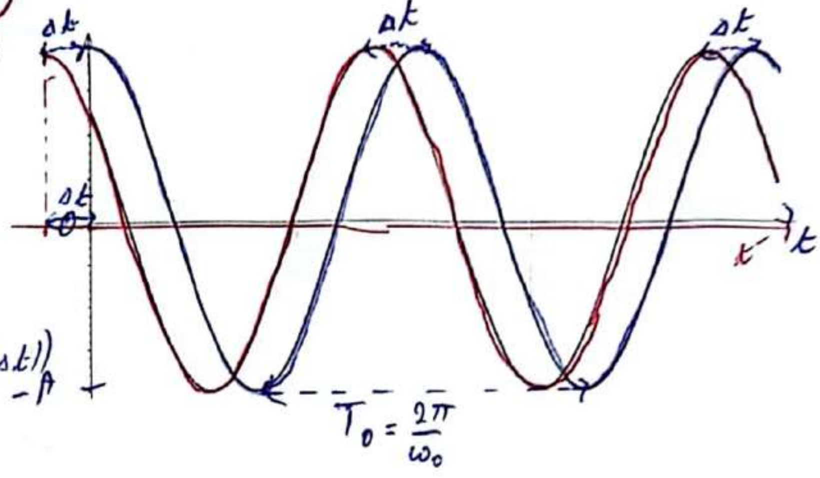
Pour le cas $x = x(t=0) = x_0$ $v(t=0) = 0$ → la courbe présente une demi tangente à l'origine horizontale

*2

*

Cas du dessin $\Delta t > 0$ $\varphi > 0$ avance de phase

Remarque : $x = A.\cos(\omega_0 t)$ $y = A.\cos(\omega_0 t + \varphi)$



y est en avance sur x car elle passe par son maximum avant x.

φ (avance de) phase (à l'origine)

$y(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ rad

$y(t) = A\cos\left[\omega_0\left(t + \frac{\varphi}{\omega_0}\right)\right] = A\cos(\omega_0(t+\Delta t))$

où $\Delta t = \frac{\varphi}{\omega_0} \Rightarrow \varphi = \omega_0 \Delta t$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \Rightarrow \boxed{\varphi = \frac{2\pi}{T_0}\Delta t}$ $\left(\frac{\varphi}{2\pi} \middle| \frac{\Delta t}{T_0}\right)$

Δt : décalage temporel

On pose $t' = t + \Delta t$ $t' = 0$ pour $t = -\Delta t$

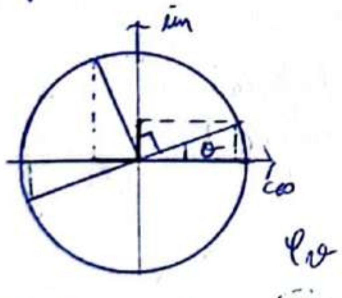
$y(t') = A\cos(\omega_0 t')$

Rq : Si $\varphi < 0$ $\Delta t < 0$ y est en retard sur x

$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$

$v(t) = \dot{x}(t) = -x_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t)$

à t fixé $\theta = \omega_0 t$



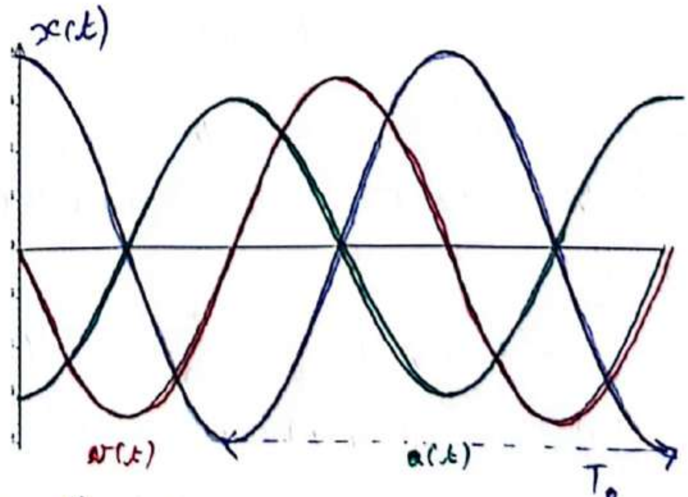
$v(t) = x_0 \omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right)$

v est en avance / x de $\varphi_v = +\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow$ v est en quadrature avance

$\varphi = \frac{2\pi \Delta t}{T_0} \Rightarrow \Delta t = \frac{T_0 \varphi}{2\pi}$

$\Delta t_v = \frac{T_0}{2\pi} \times \frac{\pi}{2} = \frac{T_0}{4}$



$a(t) = \frac{dv}{dt} = \ddot{x} = -x_0 \omega_0^2 \cos(\omega_0 t)$

$a(t) = x_0 \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \pi)$

$\Delta t_a = \frac{T_0}{2\pi} \times \pi = \frac{T_0}{2}$ a(t) est en opposition de phase / x(t)

2.) Etude énergétique

Rappels

Travail d'une force constante, lorsque son point d'application M se déplace de A à B : $\boxed{W_{A\to B}(\vec{F}) = \vec{F}.\overrightarrow{AB}}$

Si le travail de F ne dépend pas du chemin suivi, la force est dite conservative et le travail s'écrit sous la forme :

$$\boxed{W_{A\to B}(\vec{F}) = -[Ep(B) - Ep(A)] = -\Delta Ep}$$

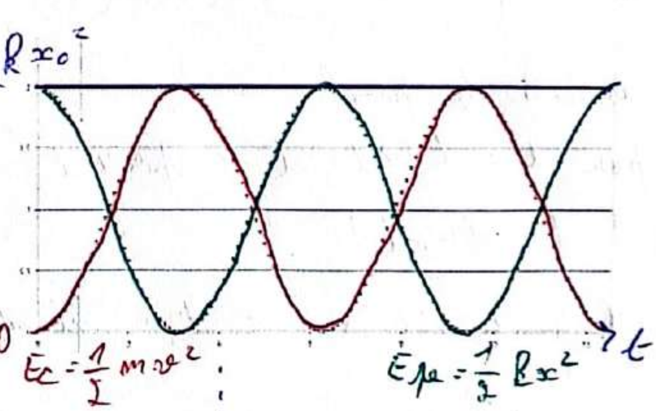
Energie potentielle de pesanteur : Epp = mgz + cste si z est l'altitude $\uparrow \vec{e_z}$

Energie potentielle élastique : $Ep_e = \frac{1}{2}kx^2 + cste$ où $x = l - l_0$ alongement du ressort

Energie cinétique : $\boxed{Ec(M) = \frac{1}{2} m v^2(M)}$

L'énergie mécanique Em=Ec+ Ep se conserve si toutes les forces qui travaillent dérivent d'une énergie potentielle (en l'absence de frottements)

Rq : Pour une force conservative
$W_{A\to A} = -[Ep(A) - Ep(A)] = 0$
Pour une force de frottement $W_{A\to A} \neq 0$
(entraîne un échauffement + usure des semelles)



Pour le ressort : $z = cste_1 \Rightarrow Epp = cste_2$

$Ep_e = \frac{1}{2}kx^2 + cste_3$ où $x = l - l_0$

$Ep = Epp + Ep_e = \frac{1}{2}kx^2 + C^{ste}$

$\boxed{\text{on choisit } C^{ste} = 0}$ $\boxed{Ep = \frac{1}{2}kx^2}$ $\boxed{Ec = \frac{1}{2}mv^2}$

*
$\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$
$\Rightarrow \cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2}$
$(I) \Rightarrow Ep = \frac{1}{2}kx_0^2 \frac{1+\cos(2\omega_0 t)}{2}$

C.I. $\boxed{x(0) = x_0 \quad v(0) = 0}$

$Ep = \frac{1}{4}kx_0^2[1+\cos(2\omega_0 t)]$ de pulsation $\omega' = 2\omega_0$
de période $T' = \frac{2\pi}{\omega'} = \frac{2\pi}{2\omega_0} = \frac{\pi}{\omega_0}$

$x(t) = x_0\cos(\omega_0 t)$

$v(t) = \dot{x}(t) = -x_0\omega_0\sin(\omega_0 t)$

Or $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \Rightarrow \boxed{T' = \frac{T_0}{2}}$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} Ep = \frac{1}{2}kx_0^2\cos^2(\omega_0 t) \\ Ec = \frac{1}{2}mx_0^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t) \end{array} \right.$$

Energie mécanique $Em = Ec + Ep$

$Em = \frac{1}{2}kx_0^2\cos^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2}mx_0^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t)$

Or $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

$\Rightarrow Em = \frac{1}{2}kx_0^2\cos^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2}m \times \frac{k}{m}x_0^2\sin^2(\omega_0 t)$

$= \frac{1}{2}kx_0^2 [\underbrace{\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t)}_{=1}]$

$\boxed{Em = \frac{1}{2}kx_0^2}$ Em = constante car il n'y a pas de forces non conservatives (pas de frottements) $Em = Em(t=0)$ *