Cahier de Vacances

Un ruban de Möbius vu par Escher

Un ruban de Möbius est une surface mathématique étudiée par Möbius et Listing en 1858. Elle a la particularité d'avoir une seule face. Ce qui veut dire qu'en partant d'un point quelconque du ruban, si on trace une ligne, sans jamais lâcher le stylo, on se retrouve, à mi-chemin, au point de départ mais de l'« autre côté » du ruban. On est pourtant toujours sur la même face. De même, cette surface a un seul bord. C'est une surface que l'on ne peut pas orienter, on parle en mathématiques de surface non orientable [1].

1. Regardez la video sur YouTube sur le ruban de Möbius, les petites découvertes 12, faite par le Palais de la Découverte

Quelques pistes pour organiser votre travail en maths pendant les vacances.

La liste suivante est plutôt exhaustive. Ne cherchez pas forcément à tout faire. Mettez l'accent sur les notions qui posent le plus de problèmes. Très important : s'entraîner en calcul (cf. exercices supplémentaires).

Revoir les chapitres 1, 2, 3

Relire aussi les fiches bilan et la fiche *Conseils généraux de rédaction* (toutes les fiches sont sur le site de classe). Refaire quelques exercices des TD.

Les formules

Pour apprendre les formules et les réviser (régulièrement), vous devez les écrire, cahier fermé, puis vérifier qu'il n'y a pas d'erreur. Recommencer tant qu'il y a des erreurs.

- ❏ Règles sur les puissances (avec x^α , $\alpha \in \mathbb{R}$), Propriétés de ln, exp, Propriétés des valeurs absolues.
- ❏ Limites classiques : croissances comparées (avec $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$), limites usuelles issues des taux d'accroissement.
- ❏ Formules d'additions en trigo : $\cos(a \pm b), \sin(a \pm b), \tan(a \pm b)$. Formules de duplication : $\sin(2x)$ et $\tan(2x)$. Retrouver très rapidement les 3 égalités sur $\cos(2x)$ puis inverser pour avoir $\cos^2 x$ et $\sin^2 x$ en fonction de $\cos(2x)$.
- ❏ Dérivées usuelles (aussi les nouvelles fonctions usuelles : Arccos, Arcsin, Arctan, ch, sh).
- ❏ ch2 : Sommes à apprendre par cœur ($\sum k, \sum k^2, \sum k^3, \sum q^k$, la formule du binôme), factorisation (partielle) de $a^n - b^n$ (cas particulier $n = 3$).

DS1 et DS2

- ❏ Si vous ne l'avez pas encore fait, reprendre le DS1. Lire les annotations sur la copie, le corrigé, la feuille de remarques. Refaire certaines questions.
- ❏ Consulter le corrigé du DS2 sur le site. Choisir certaines questions à refaire.

Calcul

- ❏ Reprendre / finir les fiches d'AP de calcul algébrique (niveau 1 et 2).
- ❏ S'entraîner à la dérivation : reprendre la fiche d'AP2 et refaire / finir les calculs de dérivées.
- ❏ Voir aussi la fin du cahier pour des exercices supplémentaires.

Complexes

Travailler le chapitre sur les complexes.

DM 4

A commencer au début des vacances, ne pas le faire au dernier moment.

✷ ✷

Dans la suite, ce sont des exercices supplémentaires. Par exemple, en étalant sur 7 jours, vous pouvez faire un calcul de dérivée par jour et 2/3 calculs algébriques.
Le corrigé sera mis sur le site pendant les vacances dans la rubrique `Revisions_Vacances` *(mais chercher avant de regarder le corrigé !)*

Calcul de dérivées

Déterminer l'ensemble de définition de f. Déterminer un domaine où la fonction est au moins dérivable (« au moins » concerne les fonctions pour lesquelles il y a des problèmes pour conclure en certains points, on n'étudiera pas ces points particuliers).

1°) $f(x) = \sqrt{\ln(x^2-1)}$

2°) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1} + \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

3°) $f(x) = 4^x - 2^{x+1}$

4°) $f(x) = \dfrac{\cos(2x)}{\sin(x)}$

5°) $f(x) = \ln\left(\sqrt{x(1-x)}\right)$

6°) $f(x) = \text{Arctan}\left(\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}\right)$

7°) $f(x) = \text{Arccos}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

Pour aller plus loin : en déduire une nouvelle expression de f.

Calcul algébrique : divers

1°) On pose $A = \dfrac{33215}{66317}$ et $B = \dfrac{104348}{208341}$. A et B sont-il égaux ? *Ne pas utiliser la calculatrice !*

2°) Simplifier la fraction : $A = \dfrac{(-2)^{2k+1} \times 3^{2k-1}}{4^k \times 3^{-k+1}}$.

3°) En utilisant le calcul littéral, calculer : $B = \dfrac{1\,978 \times 1\,979 + 1\,980 \times 21 + 1958}{1\,980 \times 1\,979 - 1\,978 \times 1\,979}$

4°) Mettre sous la forme d'une seule fraction, qu'on écrira sous la forme la plus simple possible.

a) $C = \dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

b) $D = \frac{a^3-b^3}{(a-b)^2} - \frac{(a+b)^2}{a-b}$ pour $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3$, distincts deux à deux.

c) $E = \dfrac{\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\frac{2n+2}{n^2(n-1)^2}}$ pour $n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1,2\}$.

5°) Factoriser pour $x \in \mathbb{R}$: $F = \left(-9x^2+24\right)\left(8x^2+8\right) + 64x^4 - 64$

6°) Simplifier : $G = \left(\dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}\right)^2$.

7°) Donner une écriture simplifiée des réels suivants :

a) $H = 3e^{-\frac{1}{2}\ln 3}$

b) $I = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$

c) $J = \ln(\sqrt{\exp(-\ln(e^2))}$

d) $K = \dfrac{1}{8}\ln\left(\dfrac{1}{4}\right) - \dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{1}{8}\right)$

8°) Exprimer sous forme algébrique :

a) $L = (4-5i)(6+3i)$

b) $M = (2+3i)^3(2-3i)^3$

c) $N = (-4+i\sqrt{5})^3$

d) $O = \left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$

9°) Soit $a \in \mathbb{C}$ distinct de 1 tel que $a^5 = 1$. Calculer les nombres suivants :

a) $P = a^7 - 3a^6 + 4a^5 - a^2 + 3a - 1$

b) $Q = \displaystyle\prod_{k=0}^{1234} a^k$

10°) Simplifier pour $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $R = \dfrac{\sin(3x)}{\sin(x)} - \dfrac{\cos(3x)}{\cos(x)}$

11°) Linéariser $\sin(2x)\cos(3x)$, dé-linéariser $\cos(5x) - \cos(3x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Travail avec quantificateurs

Dire si les énoncés suivants sont vrais ou faux. On justifiera rigoureusement la réponse.
En particulier, lorsque l'énoncé est faux, on écrira mathématiquement la négation avant de prouver qu'elle est vraie.

1°) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x > 2 \implies x \geq 3$

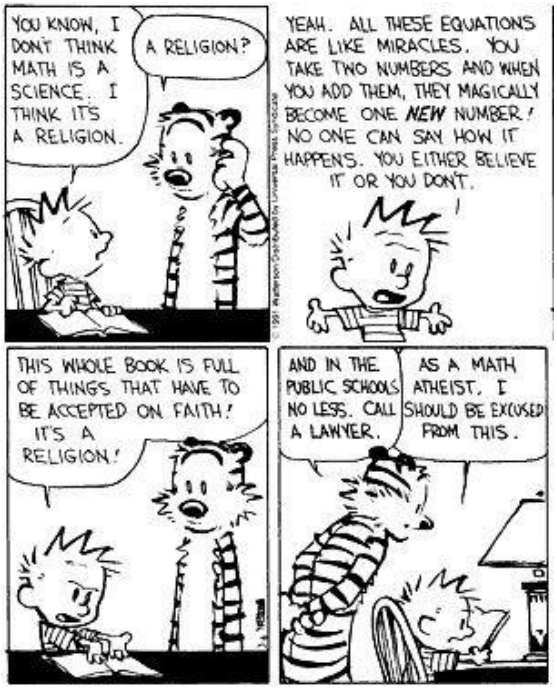
2°) $\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}^*, \quad x < y \implies \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$

3°) $\exists x \in \mathbb{R}_+, \quad x < \sqrt{x}$

4°) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \forall x' \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad x \neq x' \implies \dfrac{x+1}{x-1} \neq \dfrac{x'+1}{x'-1}$

Une équation fonctionnelle

Montrer qu'il existe une unique fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ que l'on déterminera telle que :

$$(*) : \quad \forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x$$

Calvin et Hobbes font des maths