Vacances d'automne : Corrigé des calculs en autonomie.

Calcul de dérivées

- ★ Ne pas négliger la rigueur et la rédaction lors de la recherche du domaine de définition et de la dérivabilité.
- ★ Pour travailler sur les dérivabilités de composées « à problème », relire le paragraphe 17 du ch1.
- ★ On simplifiera, réduira au maximum la dérivée.

1°) $f : x \mapsto \sqrt{\ln(x^2-1)}$

★ Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x) \text{ existe } &\iff x^2-1>0 \text{ et } \ln(x^2-1) \geq 0 \\ &\iff x^2-1 \geq 1 \\ &\iff x^2 \geq 2 \\ &\iff \sqrt{x^2} \geq \sqrt{2} \qquad \text{car } x^2 \geq 0 \text{ et } 2 \geq 0 \\ &\iff |x| \geq \sqrt{2} \\ &\iff x \leq -\sqrt{2} \text{ ou } x \geq \sqrt{2} \end{aligned}$$

Ainsi, f est définie sur $D =]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty[$.

★ $X \mapsto \sqrt{X}$ est dérivable seulement sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\forall x \in D$,

$$\begin{aligned} \ln(x^2-1) = 0 &\iff x^2-1=1 \\ &\iff x^2 = \sqrt{2} \\ &\iff x = -\sqrt{2} \text{ ou } x = \sqrt{2} \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in D \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}, \ln(x^2-1) > 0$.

f est au moins dérivable sur $D \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ comme composée de fonctions dérivables.

$\forall x \in D \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}, f'(x) = \dfrac{2x}{x^2-1} \dfrac{1}{2\sqrt{\ln(x^2-1)}} = \dfrac{x}{(x^2-1)\sqrt{\ln(x^2-1)}}$.

Méthode : Pour dériver la forme $x \mapsto \sqrt{u(x)}$, préférer l'écriture $u'(x) \times \dfrac{1}{2\sqrt{u(x)}}$ quand il y a un quotient dans $u'(x)$.

2°) $f : x \mapsto \dfrac{x}{x^2-1} + \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

★ Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $f(x)$ existe ssi $\dfrac{x+1}{x-1} > 0$.

Or le signe du quotient $\dfrac{x+1}{x-1}$ est le signe du produit $(x+1)(x-1) = x^2 - 1$, trinôme du second degré, ayant pour racines -1 et 1. De plus, le coefficient de x^2 est $1 > 0$.

Donc, $\dfrac{x+1}{x-1} > 0$ ssi $x < -1$ ou $x > 1$.

Remarque : On pouvait aussi résoudre l'inéquation :

$$\begin{aligned} x^2 - 1 > 0 &\iff x^2 > 1 \\ &\iff \sqrt{x^2} > 1 \\ &\iff |x| > 1 \\ &\iff x > 1 \text{ ou } x < -1 \end{aligned}$$

Ainsi, f est définie sur $D =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

★ f est dérivable sur D comme somme, quotient et composée de fonctions dérivables.

$\forall x \in D$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^2 - 1 - 2x^2}{(x^2-1)^2} + \frac{x - 1 - (x+1)}{(x-1)^2} \times \frac{1}{\dfrac{x+1}{x-1}} \\ &= -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2} - \frac{2}{(x-1)(x+1)} \\ &= -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2} - \frac{2}{x^2-1} \\ &= \frac{-x^2 - 1 - 2(x^2-1)}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{1 - 3x^2}{(x^2-1)^2} \end{aligned}$$

Méthode : Pour la dérivée de $x \mapsto \ln(u(x))$, préférer l'écriture $u'(x) \times \dfrac{1}{u(x)}$ s'il y a un quotient dans $u'(x)$.

3°) $f : x \mapsto 4^x - 2^{x+1}$

f est définie sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x \ln 4} - e^{(x+1)\ln 2}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions dérivables et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln 4 \times e^{x \ln 4} - \ln 2 \times e^{(x+1)\ln 2} \\ &= \ln 4 \times 4^x - \ln 2 \times 2^{x+1} \\ &= 2\ln 2 \times (2^2)^x - \ln 2 \times 2^x \times 2 \\ &= 2\ln 2 \times (2^x)^2 - 2\ln 2 \times 2^x \\ &= 2\ln 2 \times 2^x(2^x - 1) \\ &= 2^{x+1}(2^x - 1)\ln 2 \end{aligned}$$

4°) $f : x \mapsto \dfrac{\cos(2x)}{\sin(x)}$

f est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\}$.

f est dérivable sur D comme quotient et composée de fonctions dérivables.

$\forall x \in D$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{-2\sin(2x)\sin(x) - \cos(x)\cos(2x)}{\sin^2 x} \\
&= \frac{-4\sin^2 x\cos x - \cos x\cos(2x)}{\sin^2 x} \qquad \text{car } \sin(2x) = 2\sin x\cos x \\
&= \frac{-\cos x(4\sin^2 x + \cos(2x))}{\sin^2 x} \\
&= -\frac{\cos x(1+2\sin^2 x)}{\sin^2 x} \qquad \text{car } \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x
\end{aligned}$$

5°) $f : x \mapsto \ln\left(\sqrt{x(1-x)}\right)$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Le trinôme $x(1-x)$ a pour racines 0 et 1 et le coefficient de x^2 est $-1 < 0$ donc $x(1-x) > 0 \iff x \in]0,1[$.

f est donc définie sur $]0,1[$.

Simplifions l'expression de f avant de dériver : $\forall x \in]0,1[, f(x) = \dfrac{1}{2}\ln(x(1-x)) = \dfrac{1}{2}\ln(x-x^2)$.

f est dérivable sur $]0,1[$ comme composée de fonctions dérivables.

De plus, pour tout $x \in]0,1[$, $f'(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{1-2x}{x-x^2} = \dfrac{1-2x}{2x(1-x)}$.

6°) $f : x \mapsto \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}\right)$.

Arctan est définie sur $\mathbb{R}$ donc f est définie sur $\mathbb{R}_+$.

$x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable seulement sur $\mathbb{R}_+^*$ donc f est au moins dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée et quotient de fonctions dérivables.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \times (x+1) - \sqrt{x}}{(x+1)^2} \times \frac{1}{1 + \frac{x}{(x+1)^2}} \\
&= \frac{x+1-2x}{2\sqrt{x}(x+1)^2} \times \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2 + x} \\
&= \frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+(x+1)^2)}
\end{aligned}$$

7°) $f : x \mapsto \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

Arccos est définie sur $[-1,1]$.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}, x^2+1 \geq 1$ donc $\sqrt{x^2+1}$ existe et $\sqrt{x^2+1} \geq 1$. Ainsi, $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} \in]0,1]$.

f est donc définie sur $\mathbb{R}$.

Comme Arcsin est dérivable seulement sur $]-1,1[$, on recherche les x tels que $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 1$ (on ne peut pas avoir $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} = -1$).

$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 1 \iff \sqrt{x^2+1} = 1 \iff x^2+1 = 1 \iff x = 0.$

Ainsi, f est au moins dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme comme composée de fonctions dérivables.

Méthode : Pour dériver un quotient où se trouve au dénominateur une racine carrée, il vaut mieux passer en puissance négative. Cela évitera de faire apparaître des fractions étagées. On revient en racines carrées après.

$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \text{Arccos}\left((x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\right)$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{2} \times 2x \times (x^2+1)^{-\frac{3}{2}} \times \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2+1}}} \\ &= \frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}} \\ &= \frac{x}{(x^2+1)|x|} \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{x^2+1} \text{ si } x > 0 \\ -\dfrac{1}{x^2+1} \text{ si } x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On remarque : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \text{Arctan}'(x)$.

Comme $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle,

$$\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \text{Arctan}(x) + C$$

Pour $x = 1$, $f(1) = \text{Arctan}(1) + C$.

Or $\text{Arctan}(1) = \dfrac{\pi}{4}$ et $f(1) = \text{Arccos}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ donc $C = 0$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \text{Arctan}(x)$. L'égalité est encore vraie en 0.

$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, f'(x) = (-\text{Arctan})'(x)$.

Comme $\mathbb{R}_-^*$ est un intervalle,

$$\exists C' \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_-^*, f(x) = -\text{Arctan}(x) + C'$$

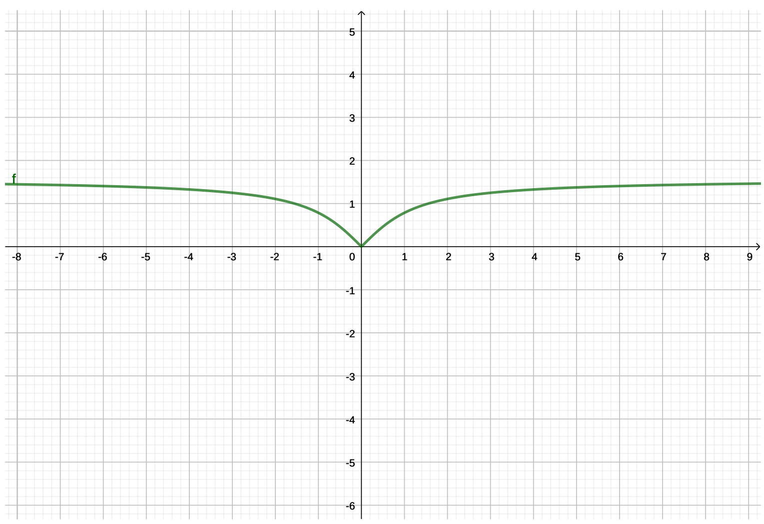
Pour $x = -1$, $f(-1) = -\text{Arctan}(-1) + C$.

Or $\text{Arctan}(-1) = -\dfrac{\pi}{4}$ et $f(-1) = \text{Arccos}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ donc $C = 0$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*, f(x) = -\text{Arctan}(x)$. Vrai aussi en 0.

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \text{Arctan}(x) \text{ si } x \geq 0 \\ -\text{Arctan}(x) \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$.

Pour information, voici l'allure de la courbe :



Calcul algébrique : divers

1°) $A = B$ ssi $33215 \times 208341 = 66317 \times 104348$.

33215 est impair et 208341 est impair dont 33215×208341 est impair.

En effet, si k et k' sont des entiers alors $(2k+1)\times(2k'+1) = 4kk'+2k+2k'+1 = 2\underbrace{(2kk'+k+k')}_{\in\mathbb{Z}}+1$ est impair.

104348 est pair donc 66317×104348 est pair.

Il ne peut donc pas y avoir égalité !

2°) On a : $A = \dfrac{(-2)^{2k+1}\times 3^{2k-1}}{4^k \times 3^{-k+1}} = \dfrac{(-2)\times(-2)^{2k}\times 3^{2k}\times 3^{-1}}{4^k\times 3^{-k}\times 3} = \dfrac{(-2)\times 4^k \times 3^{2k}\times 3^k}{4^k \times 3^2} = -2\times 3^{3k-2}$.

3°)

$$\begin{aligned}
B &= \frac{1\ 978\times 1\ 979 + 1\ 980\times 21 + 1\ 958}{1\ 980\times 1\ 979 - 1\ 978\times 1\ 979}\\
&= \frac{1\ 978\times 1\ 979 + 1\ 979\times 21 + 21 + 1\ 958}{1\ 979\times(1\ 980 - 1\ 978)}\\
&= \frac{1\ 979\times(1\ 978+21) + 1\ 979}{1\ 979\times 2} = \frac{1\ 979\times(1\ 978+21+1)}{1\ 979\times 2} = \frac{1\ 979\times 2\ 000}{1\ 979\times 2} \qquad = 1\ 000
\end{aligned}$$

4°) a)

$$\begin{aligned}
C &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\\
&= \frac{n}{n(n+1)^2} + \frac{n(n+1)}{n(n+1)^2} - \frac{(n+1)^2}{n(n+1)^2} = \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2}\\
&= \frac{n + n^2 + n - (n^2+2n+1)}{n(n+1)^2} = \frac{-1}{n(n+1)^2}.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
D &= \frac{a^3-b^3}{(a-b)^2} - \frac{(a+b)^2}{a-b} = \frac{(a-b)\left(ab+a^2+b^2\right)}{(a-b)^2} - \frac{(a+b)^2}{a-b}\\
&= \frac{ab+a^2+b^2}{a-b} - \frac{a^2+2ab+b^2}{a-b}\\
&= -\frac{ab}{a-b} = \frac{ab}{b-a}
\end{aligned}$$

c) $E = \dfrac{\dfrac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\dfrac{2n+2}{n^2(n-1)^2}} = \dfrac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)} \times \dfrac{n^2(n-1)^2}{2n+2} = \dfrac{6(n+1)}{2(n-1)} \times \dfrac{n(n-1)}{2(n+1)} = \dfrac{3}{2}n$

5°)

$$\begin{aligned}
F &= \left(-9x^2+24\right)\left(8x^2+8\right) + 64x^4 - 64\\
&= 8(x^2+1)(-9x^2+24) + 64(x^2-1)(x^2+1)\\
&= 8(x^2+1)(-9x^2+24+8(x^2-1))\\
&= 8(x^2+1)(-x^2+16)\\
&= 8\left(x^2+1\right)(4-x)(4+x)
\end{aligned}$$

6°) $G = \left(\dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}\right)^2 = \dfrac{25\times 2}{3+1+2\sqrt{3}} = \dfrac{25}{2+\sqrt{3}} = \dfrac{25(2-\sqrt{3})}{4-3} = 25(2-\sqrt{3}) = 50 - 25\sqrt{3}$.

7°) **a)** $H = 3e^{-\frac{1}{2}\ln 3} = 3\times 3^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

b) $I = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{(\sqrt{2}+1)^2}{2-1}\right) = \dfrac{1}{2}\times 2\ln(\sqrt{2}+1) = \ln(\sqrt{2}+1)$

c) $J = \ln\left(\sqrt{\exp(-\ln e^2)}\right) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\exp(-\ln e^2)\right) = \dfrac{1}{2}(-\ln e^2) = \dfrac{1}{2}\times(-2) = -1$.

d) $K = \dfrac{1}{8}\ln\left(\dfrac{1}{4}\right) - \dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{1}{8}\right) = -\dfrac{1}{8}\ln(2^2) + \dfrac{1}{4}\ln(2^3) = \dfrac{-2\ln 2}{8} + \dfrac{3\ln 2}{4} = \dfrac{-\ln 2 + 3\ln 2}{4} = \dfrac{\ln 2}{2}$.

8°) Exprimer sous forme algébrique :

a) $L = (4-5i)(6+3i) = 24+15+i(12-30) = 39-28i$.

b) $M = (2+3i)^3(2-3i)^3 = ((2+3i)(2-3i))^3 = (4+9)^3 = 13^3$.

c) Par la formule du binôme,

$N = (-4+i\sqrt{5})^3 = (-4)^3 + 3\cdot(-4)^2(i\sqrt{5}) + 3\cdot(-4)^1(i\sqrt{5})^2 + (i\sqrt{5})^3 = -64+48i\sqrt{5}+60-5i\sqrt{5}$.

$N = -4+43i\sqrt{5}$

d) $O = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3 = e^{i2\pi} = 1$.

9°) **a)** $P = a^7 - 3a^6 + 4a^5 - a^2 + 3a - 1$.

De $a^5 = 1$, on déduit $a^6 = a$ et $a^7 = a^2$.

$P = a^2 - 3a + 4 - a^2 + 3a - 1 = 3$.

b) $Q = \displaystyle\prod_{k=0}^{1234} a^k$

$Q = a^S$ où $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{1234} k = \dfrac{1234\times 1235}{2} = 617\times 1235$ est un entier multiple de 5. Donc $Q = 1$.

10°) $R = \dfrac{\sin 3x}{\sin x} - \dfrac{\cos 3x}{\cos x} = \dfrac{\sin 3x\cos x - \cos 3x \sin x}{\sin x\cos x} = \dfrac{\sin(3x-x)}{\sin x\cos x} = \dfrac{\sin(2x)}{\sin x\cos x} = \dfrac{2\sin x\cos x}{\sin x\cos x} = 2$.

11°) Proposons 2 méthodes à chaque fois (avec les formules trigo ou passage en complexe).

Soit $x\in\mathbb{R}$.

★ Linéariser $\sin(2x)\cos(3x)$:

Méthode 1 :

$$\sin(3x+2x) = \sin(3x)\cos(2x) + \sin(2x)\cos(3x)$$
$$\sin(3x-2x) = \sin(3x)\cos(2x) - \sin(2x)\cos(3x)$$

On effectue $\dfrac{L_1 - L_2}{2}$: $\sin(2x)\cos(3x) = \dfrac{1}{2}(\sin(5x)-\sin(x))$.

Méthode 2 :

$$\begin{aligned}\sin(2x)\cos(3x) &= \frac{e^{i2x}-e^{-i2x}}{2i}\frac{e^{i3x}+e^{-i3x}}{2}\\ &= \frac{1}{4i}\left(e^{i5x}+e^{-ix}-e^{ix}-e^{-i5x}\right)\\ &= \frac{1}{4i}\left(2i\sin(5x)-2i\sin(x)\right)\\ &= \frac{1}{2}(\sin(5x)-\sin(x))\end{aligned}$$

★ Dé-linéariser $\cos(5x) - \cos(3x)$

Méthode 1 : On passe par le milieu de $5x$ et $3x$: $\dfrac{5x+3x}{2} = 4x$.

$$\begin{aligned}\cos(5x) - \cos(3x) &= \cos(4x + x) - \cos(4x - x)\\ &= \cos(4x)\cos(x) - \sin(4x)\sin(x) - (\cos(4x)\cos(x) + \sin(4x)\sin(x))\\ &= -2\sin(4x)\sin(x)\end{aligned}$$

Méthode 2 : Avec la technique de l'angle moitié, on a aussi besoin du milieu $4x$ de $5x$ et $3x$.

$$\begin{aligned}\cos(5x) - \cos(3x) &= \mathrm{Re}\left(e^{i5x} - e^{i3x}\right)\\ &= \mathrm{Re}\left(e^{i4x}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)\right)\\ &= \mathrm{Re}\left(e^{i4x} \times 2i\sin x\right)\\ &= \mathrm{Re}\left(2i\sin(x)\left(\cos(4x) + i\sin(4x)\right)\right)\\ &= -2\sin(x)\sin(4x)\end{aligned}$$

Travail avec quantificateurs

1°) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x > 2 \implies x \geq 3$: cet énoncé est faux. Justifions le.

La négation de $P \implies Q$ est P et non Q, donc la négation de l'énoncé de départ s'écrit : « $\exists x \in \mathbb{R}, x > 2$ et $x < 3$ ».

Par exemple, $x = \dfrac{5}{2}$ convient car $x > 2$ et $x < 3$.

2°) $\forall x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}^*, \quad x < y \implies \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$: cet énoncé est faux. Justifions le.

Sa négation s'écrit : « $\exists x \in \mathbb{R}^*, \exists y \in \mathbb{R}^*, x < y$ et $\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{y}$ »

Par exemple, si l'on pose $x = -1, y = 1$, alors on a bien $x < y$ et $\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{y}$.

3°) $\exists x \in \mathbb{R}_+, \quad x < \sqrt{x}$: cet énoncé est vrai.

Par exemple, si l'on pose $x = \dfrac{1}{4}$, alors $\sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$ et on a bien alors $x < \sqrt{x}$.

4°) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \forall x' \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad x \neq x' \implies \dfrac{x+1}{x-1} \neq \dfrac{x'+1}{x'-1}$: cet énoncé est vrai. Pour le justifier, écrivons l'implication sous sa forme contraposée. L'énoncé de départ est équivalent à :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \forall x' \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \frac{x+1}{x-1} = \frac{x'+1}{x'-1} \implies x = x'$$

Soient alors x et x' deux réels différents de 1.

On suppose que : $\dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{x'+1}{x'-1}$. Alors,

$$(x+1)(x'-1) = (x'+1)(x-1)$$
$$xx' - x + x' - 1 = xx' - x' + x - 1$$
$$\text{ainsi, } 2x = 2x' \text{ ie } x = x'$$

Ce qui prouve l'énoncé.

Une équation fonctionnelle

On effectue un raisonnement par analyse-synthèse :

- ★ *Analyse* : On se donne une fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ vérifiant $(*)$.

  Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

  En appliquant $(*)$: $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x \quad L_1$.

  En appliquant $(*)$ avec $\frac{1}{x}$: $f\left(\frac{1}{x}\right) + 2f(x) = \frac{1}{x} \quad L_2$.

  En calculant $L_1 - 2L_2$: $-3f(x) = x - \frac{2}{x}$.

  Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{2}{3x} - \frac{x}{3}$.

  D'où l'unicité de f.

- ★ *Synthèse* : On pose $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{2}{3x} - \frac{x}{3} \end{array}$.

  Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

  $$\begin{aligned} f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{2}{3x} - \frac{x}{3} + \frac{4}{3}x - \frac{2}{3x} \\ &= x \end{aligned}$$

  Ainsi f est solution de $(*)$.

$$\boxed{\text{Il y a une unique solution au problème } (*) \text{ : la fonction } f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{2}{3x} - \frac{x}{3} \end{array}.}$$