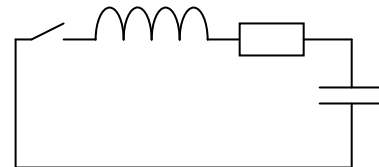


Signaux ElectriquesSE4 Oscillateurs amortis en régime transitoire

I Le circuit RLC série en régime libre	2
1.) Mise en équation.....	2
2.) Les solutions	3
II Réponse à un échelon de tension.....	8
1.) Les équations différentielles	8
2.) Mise en équation et résolution	8
3.) Les résultats	9
4.) Bilan énergétique.....	10
III Oscillateur amorti avec frottement visqueux	11
1.) Mise en équation.....	11
2.) Analogie électromécanique	12
3.) Solutions	13
4.) Bilan énergétique.....	14



I Le circuit RLC série en régime libre1.) Mise en équationa) Equation différentielle

b) Réduction canonique

On pose sur l'équation différentielle

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC} u_c(t) = 0$$

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + 2\lambda \frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c(t) = 0$$

ou

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c(t) = 0$$

$$2\lambda = \frac{R}{L}$$

$$\lambda = \frac{R}{2L}$$

Coefficient d'amortissement

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Pulsation propre

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$$

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Facteur de qualité

2.) Les solutions

On remplace la fonction par 1, la dérivée première par r, la dérivée seconde par r².

Equation caractéristique $r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$

On obtient une équation du second degré du type ar² + br + c = 0 dont on cherche les racines.

Discriminant : ($\Delta = b^2 - 4ac$) $\Delta = 4\lambda^2 - 4\omega_0^2$

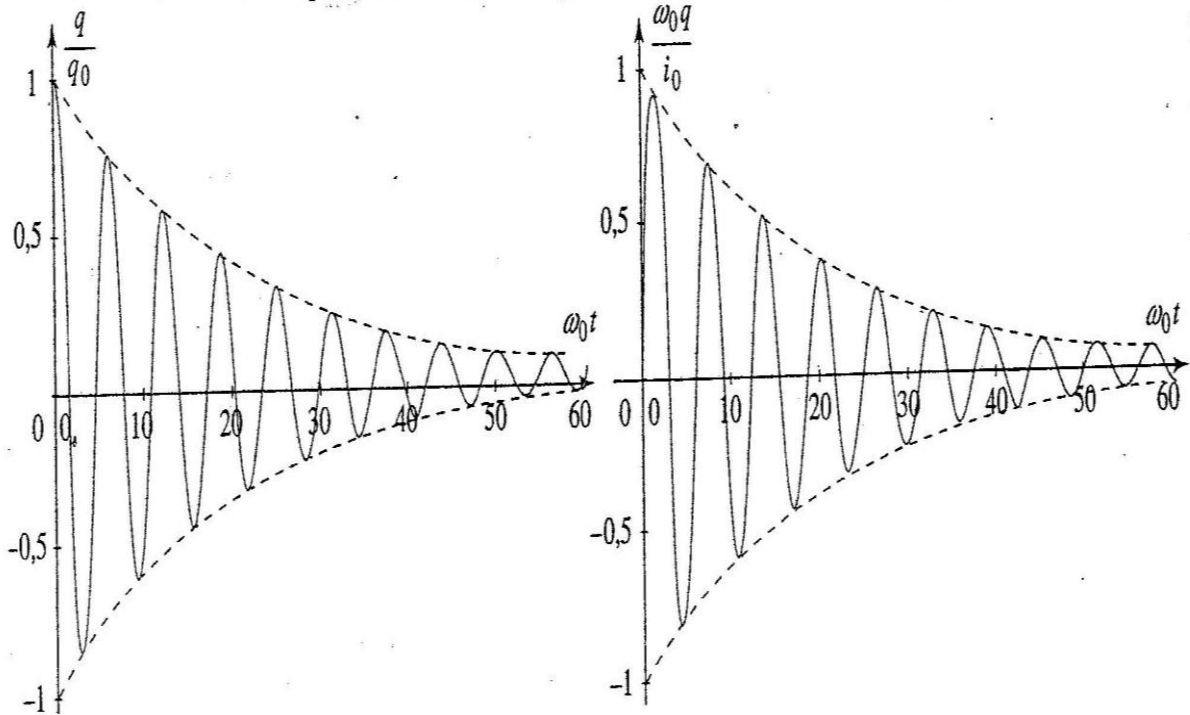
a) Cas $\Delta < 0$: Régime pseudopériodique

$$\lambda < \omega_0 \text{ ou } Q > \frac{1}{2} \text{ ou } R < R_C$$

2 solutions complexes r_1 et r_2 de la forme $r = \frac{-b \pm j\sqrt{-\Delta}}{2a}$ $r = -\lambda \pm j\Omega$

$$\Omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \text{ Pseudo-pulsation}$$

Après calculs, on trouve : $u_C(t) = \exp(-\lambda t) \cdot [a \cos(\Omega t) + b \sin(\Omega t)] = A \exp(-\lambda t) \cos(\Omega t + \varphi)$
où a , b , A et φ sont des constantes réelles, déterminées par les conditions initiales.



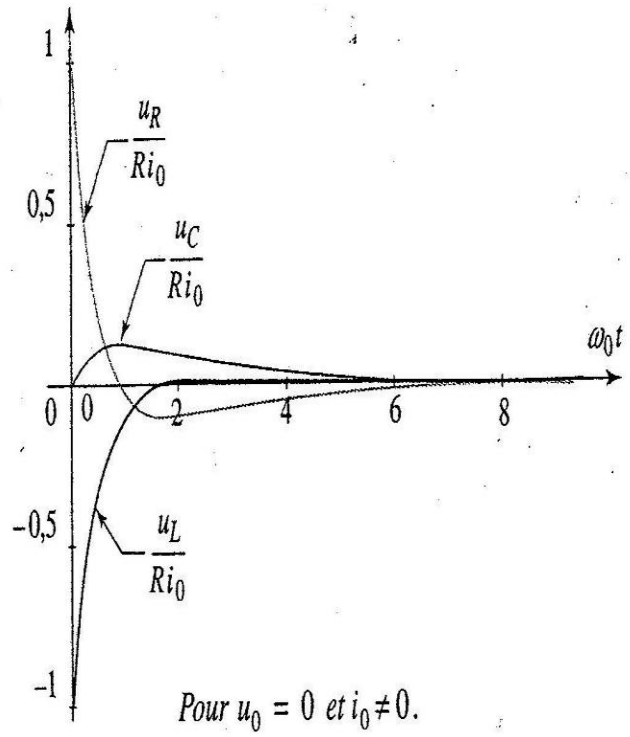
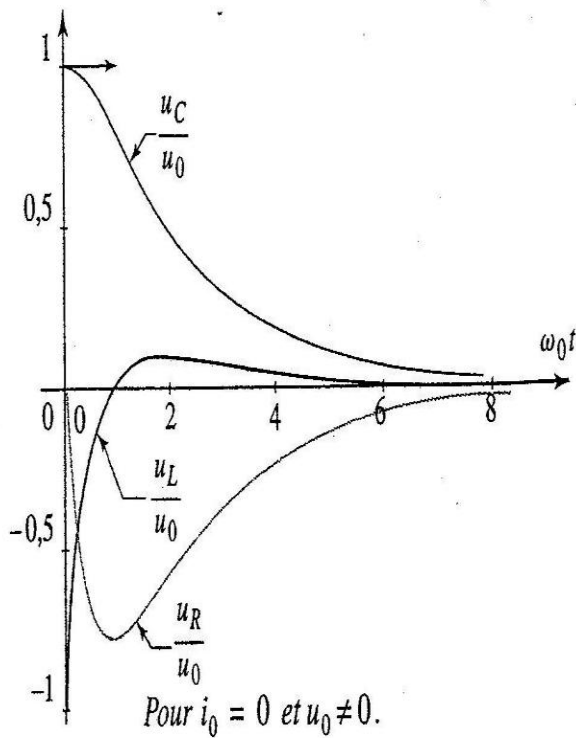
Doc. 18. Régime pseudo-périodique. $Q = 10$; $q(0) = q_0$
et $i(0) = 0$.

Doc. 19. Régime pseudo-périodique. $Q = 10$; $q(0) = 0$
et $i(0) = i_0$.

Remarques: 1) La pseudo-période est plus grande que la période propre. $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} < \omega_0$ donc $T > T_0$.

b) $\Delta > 0$ Régime apériodique2 solutions réelles r_1 et r_2 $\lambda > \omega_0$ ou $Q < \frac{1}{2}$ ou $R > R_C$

$$u_C(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \quad A, B \text{ constantes réelles.}$$

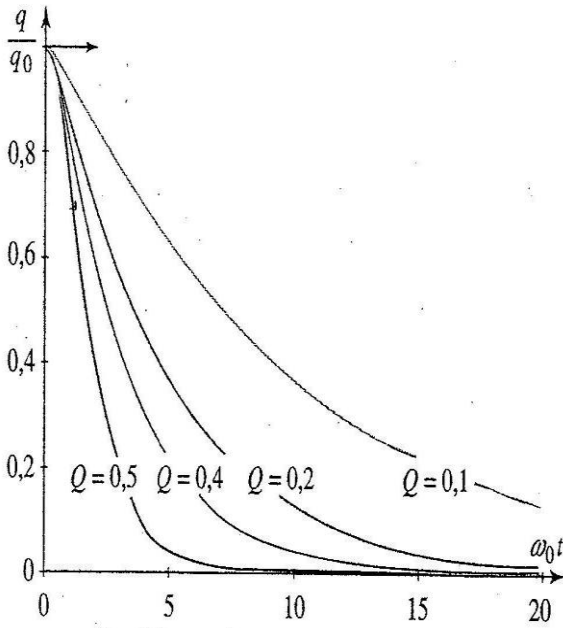


Doc. 15. d.d.p. aux bornes des trois dipôles : régimes apériodiques $Q = 0,4$.

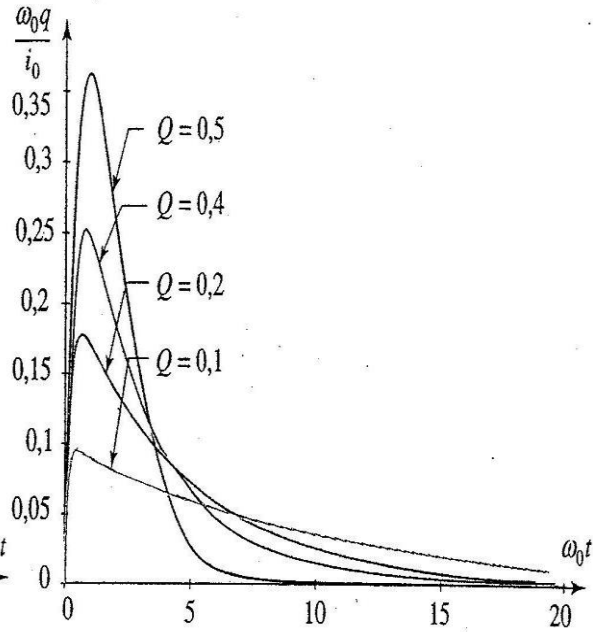
c) $\Delta = 0$: Régime critique 1 solution double réelle r_0

$$Q = \frac{1}{2} \text{ ou } \lambda = \omega_0 \text{ ou } R = R_C$$

$u_C(t) = (At + B)e^{-\lambda t}$ A, B constantes réelles.

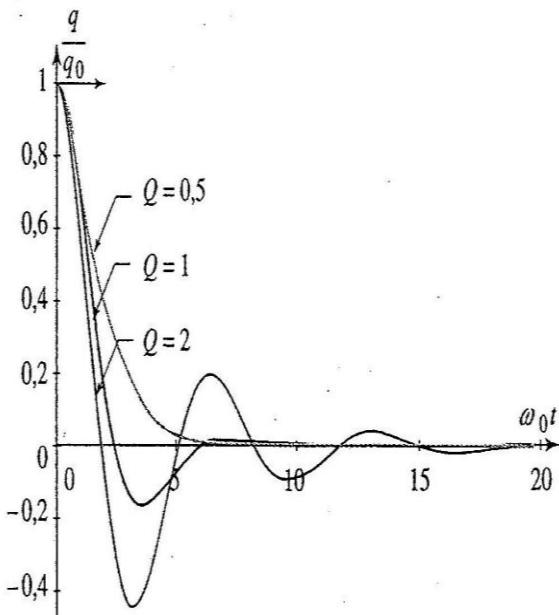


Conditions initiales $(q_0 \neq 0, i_0 = 0)$.

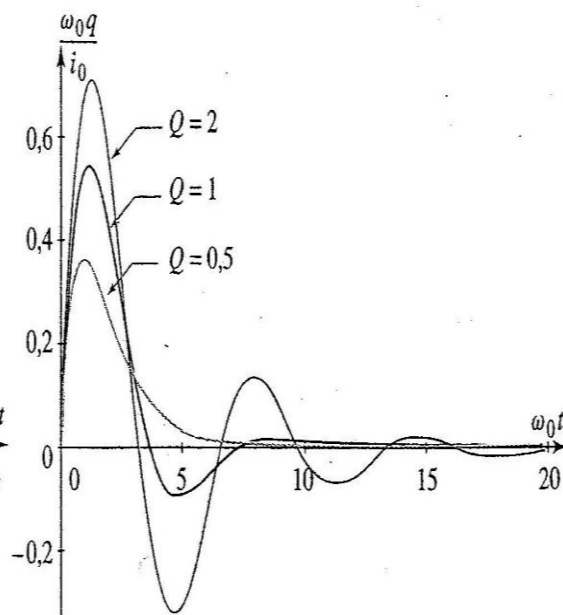


Conditions initiales $(q_0 = 0, i_0 \neq 0)$.

Doc. 14. Régimes apériodique ($Q < 0,5$) et critique ($Q = 0,5$).



Doc. 20. Régimes pseudo-périodique et critique.
Condensateur initialement chargé $i(0) = 0$.



Doc. 21. Régimes pseudo-périodique et critique.
Intensité initiale i_0 dans le circuit.

II Réponse à un échelon de tension

1.) Les équations différentielles

Généralisation :

Commande $f(t)$

Réponse $y(t)$

$$a_0 y + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} = f(t) \quad \text{Equation différentielle du second ordre (ou du premier ordre si } a_2=0)$$

Solution complète : $y(t) = y_t(t) + y_f(t)$

- $y_t(t)$ est la solution libre ou solution générale de l'équation sans second membre (ou équation homogène)

$$a_0 y_\lambda + a_1 \frac{dy_\lambda}{dt} + a_2 \frac{d^2 y_\lambda}{dt^2} = 0$$

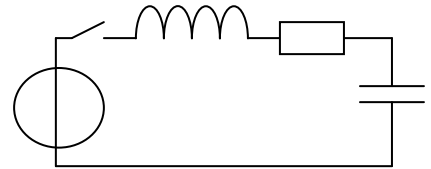
Elle correspond au régime libre du circuit (c'est-à-dire sources éteintes).

- $y_f(t)$ est la solution forcée ou solution particulière de l'équation avec second membre (ou équation

complète)
$$a_0 y_f + a_1 \frac{dy_f}{dt} + a_2 \frac{d^2 y_f}{dt^2} = f(t)$$

Elle correspond au régime permanent. Elle est du même type que le second membre : Si $f(t)$ est une constante, $y_f(t)$ est aussi une constante.

2.) Mise en équation et résolution

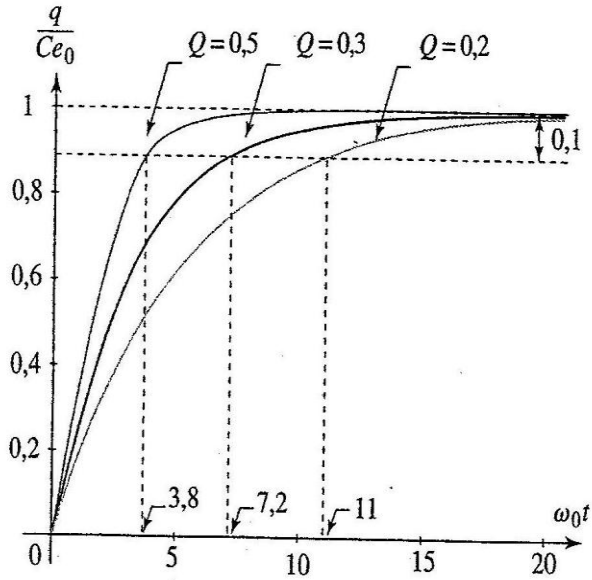


$$\Delta < 0 \quad u_c(t) = \exp(-\lambda t) \cdot [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)] + E = K \exp(-\lambda t) \cos(\Omega t + \varphi) + E$$

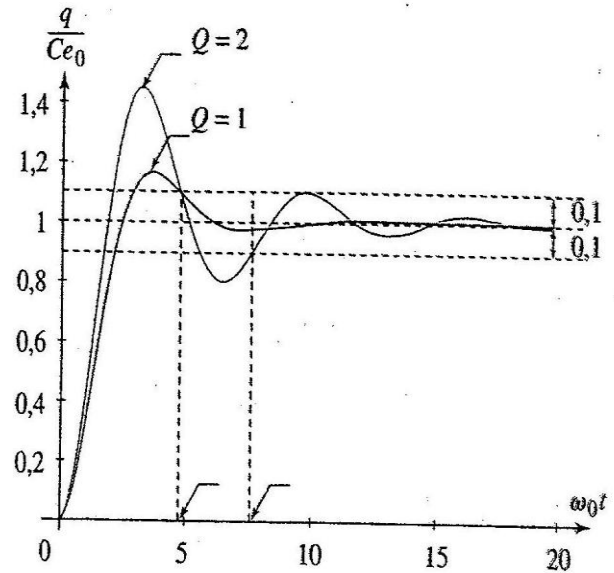
$$\Delta > 0 \quad u_c(t) = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t} + E$$

$$\Delta = 0 \quad u_c(t) = (At + B)e^{-\lambda t} + E$$

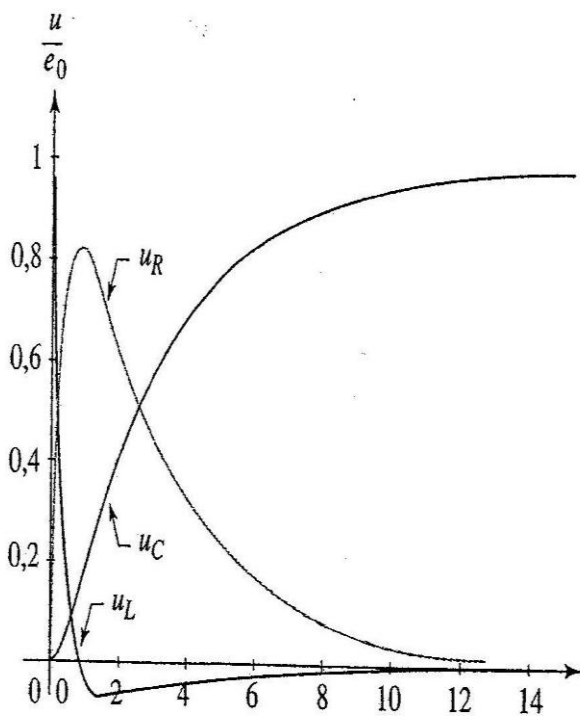
3.) Les résultats



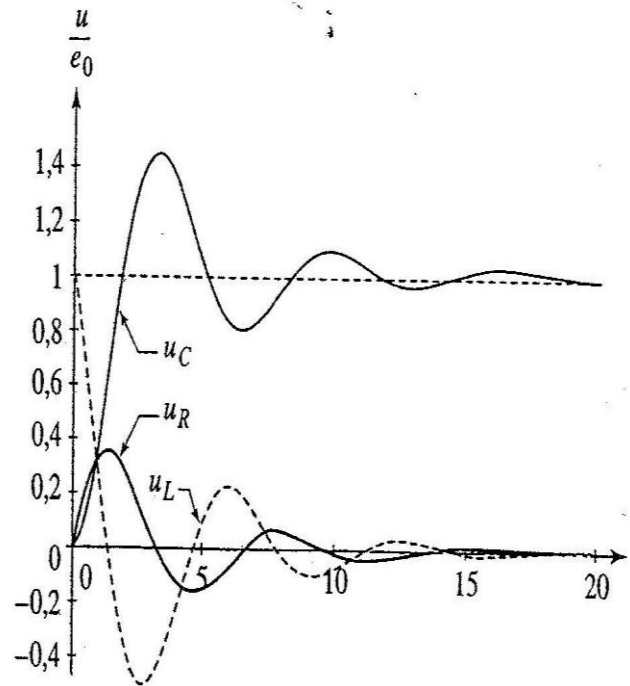
Doc. 35a. Réponse à un échelon de tension. Régimes aperiodiques.



Doc. 36a. Réponse à un échelon de tension. Régimes pseudo-périodiques.



Doc. 35c. Réponse à un échelon de tension. $Q = 0,3$.



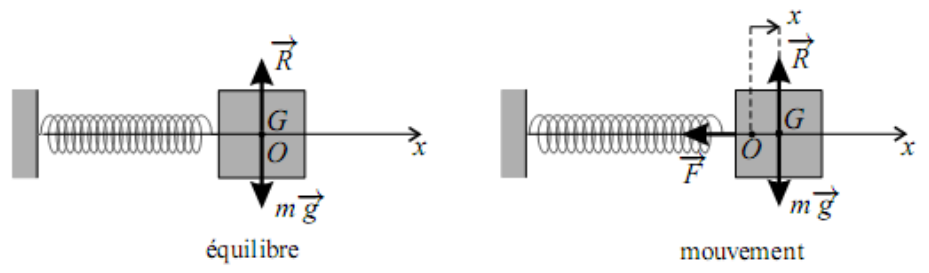
Doc. 36c. Réponse à un échelon de tension. $Q = 2$.

4.) Bilan énergétique

III Oscillateur amorti avec frottement visqueux

1.) Mise en équation

https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Meca/Oscillateurs/oscillateur_horizontal.php



$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\alpha}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0 \quad \text{Formes canoniques :} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

Pulsation propre	Coefficient d'amortissement	Facteur de qualité

2.) Analogie électromécanique

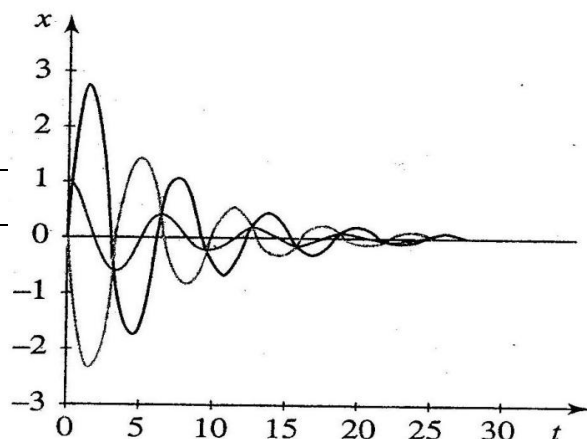
Mécanique	Electricité
Equation différentielle :	
Pulsation propre :	
Facteur de qualité	
Elongation :	
Vitesse :	
Masse :	
Coefficient de frottement fluide :	
Raideur du ressort :	
Energie mécanique :	

3.) Solutions

a) Régime pseudo-périodique

$$\Delta < 0 \quad \lambda < \omega_0 \quad \text{ou} \quad Q > \frac{1}{2}$$

$$x(t) = \exp(-\lambda t) \cdot [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)] = K \exp(-\lambda t) \cos(\Omega t + \varphi)$$



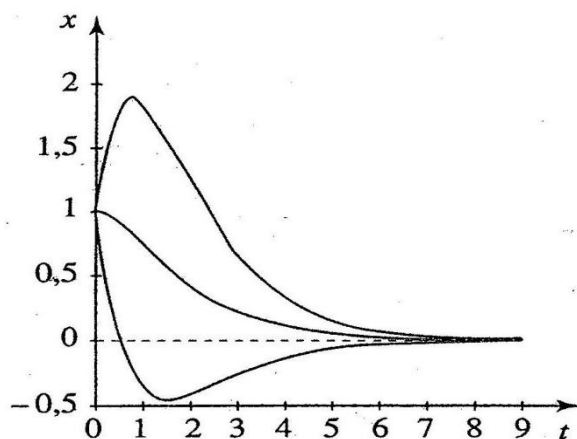
Doc. 12. Oscillateur harmonique amorti par frottement fluide : régime pseudo-périodique $\left(Q > \frac{1}{2}\right)$.

Le mobile est lâché en $x = x_0$ avec une vitesse v_0 positive, nulle ou négative pour les trois cas apparaissant sur la figure.

b) Régime aperiodique

$$\Delta > 0 \quad \lambda > \omega_0 \quad \text{ou} \quad Q < \frac{1}{2}$$

$$x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

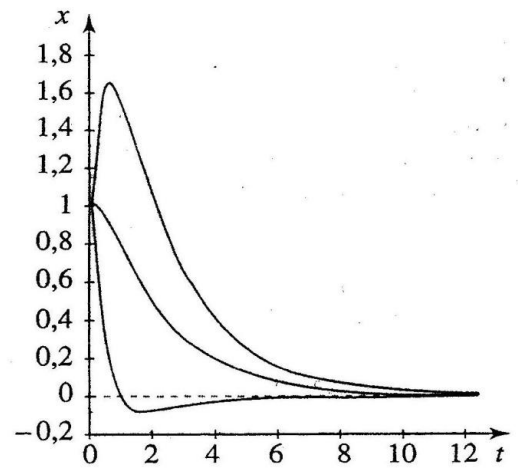


Doc. 17. Oscillateur harmonique amorti par frottement fluide : régime aperiodique $\left(Q < \frac{1}{2}\right)$ suivant les conditions initiales, l'élongation passe par un extremum ou tend uniformément vers zéro.

c) Régime critique

$$\Delta=0 \quad \lambda = \omega_0 \quad \text{ou} \quad Q = \frac{1}{2}$$

$$x(t) = (At + B)e^{-\lambda t}$$



Doc. 15. Oscillateur harmonique amorti par frottement fluide : régime critique ($Q = \frac{1}{2}$). Les conditions initiales sont les mêmes que celles du mouvement pseudo-périodique (doc. 12). Dans tous les cas, le retour à l'équilibre s'effectue plus rapidement.

4.) Bilan énergétique