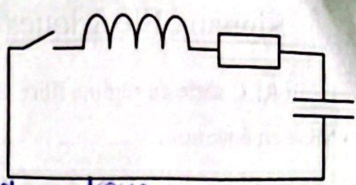
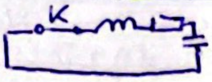
I Le circuit RLC série en régime libre

1.) Mise en équation

a) Equation différentielle



à t=0  On ferme K

à t<0 C chargé / K ouvert depuis longtemps

$U_C = U_{C0}$

$i = 0$

à t>0 équation de maille.

$U_L + U_R + U_C = 0$

$\Rightarrow L\frac{di}{dt} + Ri + U_C = 0$ (1)

Or $i = C\frac{du_C}{dt} \Rightarrow LC\frac{d^2U_C}{dt} + RC\frac{du_C}{dt} + u_C = 0$

$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2U_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC}U_C = 0}$ (1')

dérive (1) $L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{du_C}{dt} = 0$

or $\frac{du_C}{dt} = \frac{i}{C} \Rightarrow L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0$

$\boxed{\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0}$ (1'')

[Remarque : $q = Cu_C$

(1') × C : $\frac{d^2q}{dt} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0$]

• $\mathcal{E}_C = \frac{1}{2}Cu_C^2$ est une fonction continue donc u_C aussi $u_C(t=0^-) = \boxed{u_C(t=0^+) = U_{C_0}}$

• $\mathcal{E}_L = \frac{1}{2}Li^2$ est une fonction continue donc i aussi: $i(t=0^-) = \boxed{i(t=0^+) = 0}$

$i(0^+) = C\frac{du_C}{dt}(t=0^+) \Rightarrow \boxed{\frac{du_C}{dt}(0^+) = 0}$

(1) $L\frac{di}{dt}(0^+) + Ri(0^+) + U_C(0^+) = 0$

$\Rightarrow L\frac{di(0^+)}{dt} + 0 + U_{C_0} = 0$

$\Rightarrow \boxed{\frac{di(0^+)}{dt} = -\frac{U_{C0}}{L}}$

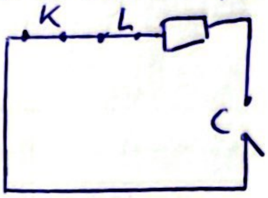
à t∞ Pour le condensateur

$i = C\frac{du_C}{dt} = 0$ si U_C est cste (RP)

C équivaut à un interrupteur ouvert

Pour la bobine idéale $U_L = L\frac{di}{dt} = 0$

I est cste (RP) L équivaut à 1 fil.



donc $\boxed{i(t_\infty) = 0}$

Or $U_L + U_R + U_C = 0$

$U_L = 0 \Rightarrow U_C = -U_R = -Ri = 0$

$\boxed{U_C(t_\infty) = 0}$

b) Réduction canonique

On pose sur l'équation différentielle $\boxed{\frac{d^2u_C}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{du_C}{dt}+\frac{1}{LC}u_C(t)=0}$ (1')

A: $\boxed{\frac{d^2u_C}{dt^2}+2\lambda\frac{du_C}{dt}+\omega_0^2u_C(t)=0}$ ou B: $\boxed{\frac{d^2u_C}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{du_C}{dt}+\omega_0^2u_C(t)=0}$

$2\lambda=\frac{R}{L}$ $\boxed{\lambda=\frac{R}{2L}}>0$ Coefficient d'amortissement (identification (1')) λ en s^{-1}

$\omega_0^2=\frac{1}{LC}$ $\boxed{\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}}>0$ Pulsation propre ω_0 en $rad.s^{-1}$ (cf SE3)

$\frac{\omega_0}{Q}=\frac{R}{L}$ $\boxed{Q=\frac{L\omega_0}{R}\overset{*}{=}\frac{1}{RC\omega_0}\overset{**}{=}\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}>0$ Facteur de qualité (sans dimension)

* $Q=\frac{L\omega_0}{R}\times\frac{\omega_0}{\omega_0}=\frac{L\omega_0^2}{R\omega_0}$ or $\omega_0^2=\frac{1}{LC}$

$\Rightarrow Q=\frac{L}{R\omega_0}\times\frac{1}{LC}\Rightarrow Q=\frac{1}{RC\omega_0}$

** $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ $Q=\frac{L\omega_0}{R}=\frac{L}{R}\times\frac{1}{\sqrt{LC}}=\frac{\sqrt{L}}{R\sqrt{C}}$

entre A et B $2\lambda=\frac{\omega_0}{Q}$

$\Rightarrow\lambda=\frac{\omega_0}{2Q}$ (C)

2.) Les solutions

On remplace la fonction par 1, la dérivée première par r, la dérivée seconde par r^2.

Equation caractéristique $\boxed{r^2+2\lambda r+\omega_0^2=0}$ on prend (A) $\frac{d^2u_C}{dt^2}=r^2$ $\frac{du_C}{dt}=r$ $u_C=1$

On obtient une équation du second degré du type $ar^2+br+c=0$ dont on cherche les racines.

Discriminant : ($\Delta=b^2-4ac$) $\boxed{\Delta=4\lambda^2-4\omega_0^2}$

$\Delta=4(\lambda^2-\omega_0^2)$

$=4(\lambda-\omega_0)(\lambda+\omega_0)$

$\Delta>0$ $\boxed{\lambda>\omega_0}$

(C) $\Rightarrow\frac{\omega_0}{2Q}>\omega_0$

$\Rightarrow\frac{1}{2Q}>1\Rightarrow 2Q<1$

$\Rightarrow\boxed{Q<\frac{1}{2}}$

or $Q=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}<\frac{1}{2}$

$\Rightarrow R>2\sqrt{\frac{L}{C}}$

résistance critique $R_C=2\sqrt{\frac{L}{C}}$ donc $\boxed{R>R_C}$

2 solutions réelles $\left(r=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$

$r=\frac{-2\lambda\pm\sqrt{4(\lambda^2-\omega_0^2)}}{2}=-\lambda\pm\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}$

• $\Delta=0$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{\lambda=\omega_0\Leftrightarrow Q=\frac{1}{2}\Leftrightarrow R=R_C}$

$r=-\lambda=-\omega_0$ 1 racine réelle double

• $\Delta<0$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{\lambda<\omega_0\Leftrightarrow Q>\frac{1}{2}\Leftrightarrow R<R_C}$

2 racines complexes $r=\frac{-b\pm j\sqrt{-\Delta}}{2a}$ ($j=i$)

$r=\frac{-2\lambda\pm i\sqrt{-\Delta}}{2}$

$=-\lambda\pm j\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}=-\lambda\pm j\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}$

a) Cas $\Delta < 0$: Régime pseudopériodique $\boxed{\lambda < \omega_0 \text{ ou } Q > \frac{1}{2} \text{ ou } R < R_C}$

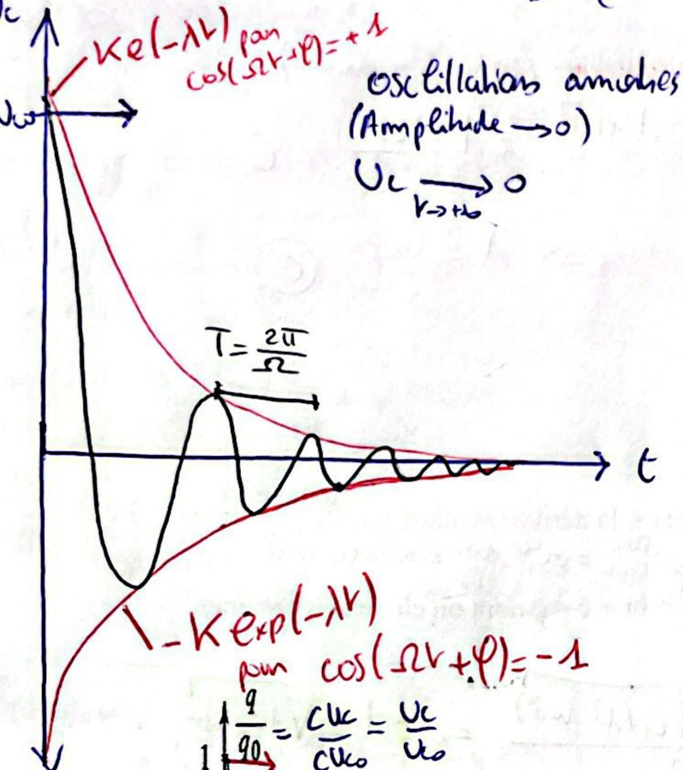
2 solutions complexes r_1 et r_2 de la forme $r = \frac{-b \pm j\sqrt{-\Delta}}{2a}$ $\boxed{r = -\lambda \pm j\Omega}$

$0 < \boxed{\Omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}$ **Pseudo-pulsation** en rad/s

Après calculs, on trouve : $\boxed{u_C(t) = \exp(-\lambda t)\cdot[a\cos(\Omega t) + b\sin(\Omega t)] = A\exp(-\lambda t)\cos(\Omega t + \varphi)}$

où a, b, A et φ sont des constantes réelles, déterminées par les conditions initiales.

Pour tracer on utilise $U_C(t) = Ke^{-\lambda t}\cos(\Omega t + \varphi)$ $\quad U_C(0^+) = U_{C0}$, $\frac{du_C}{dt}(0^+) = 0$



Remarque

$K\exp(-\lambda t) = K\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ où $\boxed{\tau = \frac{1}{\lambda}}$ en s

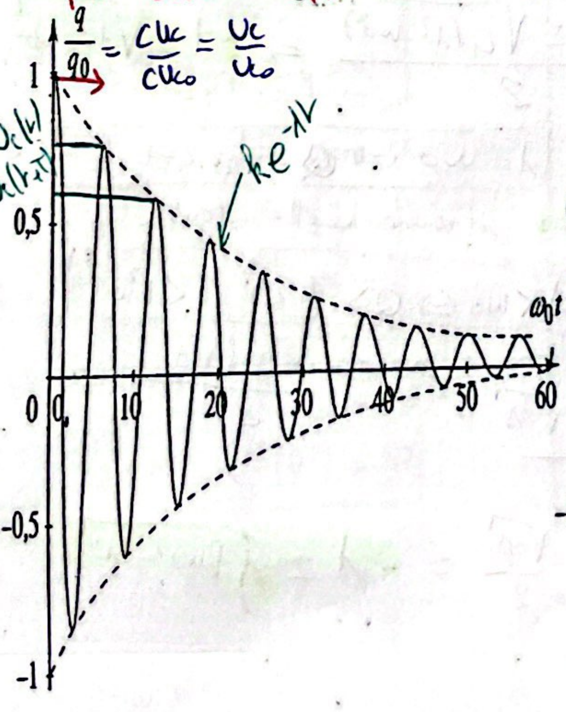
* tps relaxation cte de tps.

Pour $t = 5\tau$, on suppose que le régime permanent est atteint.

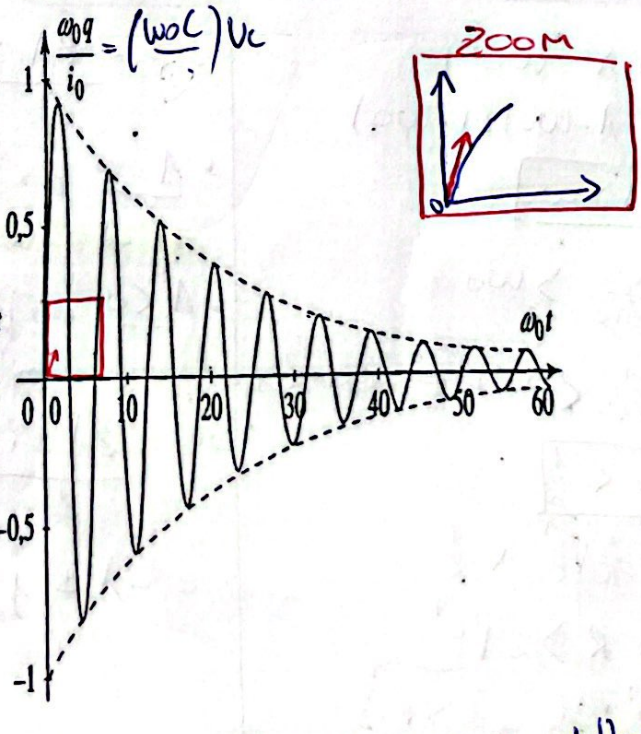
demi tangente horizontale

$U_C(0^+) = U_{C0}$

$\frac{du_C}{dt}(0^+) = 0$



Doc. 18. *Régime pseudo-périodique.* $Q = 10$; $q(0) = q_0$ et $i(0) = 0$.



Doc. 19. *Régime pseudo-périodique.* $Q = 10$; $q(0) = 0$ et $i(0) = i_0$. | d'autres CI

$q(0^+) = 0 \Rightarrow U_C(0^+) = 0$

$i(0^+) = C\frac{dU_C(0^+)}{dt} = i_0 \Rightarrow \frac{du_C}{dt}(0^+) = \frac{i_0}{C}$

$\frac{2\pi}{\Omega}$ $\frac{2\pi}{\omega_0}$

Remarques: 1) La pseudo-période est plus grande que la période propre. $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} < \omega_0$ donc $T > T_0$.

Remarque 2

cas $R=0$ (résistance)

(1) $\frac{d^2U_c}{dt^2} + \frac{1}{LC} U_c = 0$

$$\boxed{\frac{d^2U_c}{dt^2} + \omega_0^2 U_c = 0}$$

$U_c(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$
$= K\cos(\omega_0 t + \varphi)$

où $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ pulsation propre

$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

Remarque 3

cas avec $i(t)$

(1'') $$\boxed{\frac{d^2i}{dt^2} + 2\lambda\frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0}$$

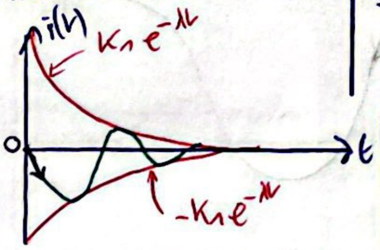
(forme canonique A)

même solution que $u_c(t)$

$i(t) = K_1 \exp(-\lambda t)\cos(\Omega t + \varphi_1)$
$= \exp(-\lambda t)(A_1\cos(\Omega t) + B_1\sin(\omega_0 t))$

CI $i(0^+) = 0$

$\left(\frac{di}{dt}\right)(0^+) = -\frac{U_{c0}}{L}$



Remarque 4

détermination des constantes

$U_c(t) = \underbrace{\exp(-\lambda t)}_{f}\left(\underbrace{A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)}_{g}\right)$

$f(t) = e^{-\lambda t}$ $f'(t) = -\lambda e^{-\lambda t}$

$g(t) = A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)$ $g'(t) = -A\Omega\sin(\Omega t) + B\Omega\cos(\Omega t)$

(1) $\frac{du_c}{dt} = fg' + f'g$
$= e^{-\lambda t}(-A\Omega\sin(\Omega t) + B\Omega\cos(\Omega t)) - \lambda e^{-\lambda t}(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t))$

$U_c(0^+) = U_{c0}$

$U_c(0^+) = e^0(A\cos 0 + B\sin 0) = A$

$\Rightarrow A = U_{c0}$

(1) $\left(\frac{du_c}{dt}\right)(0^+) = 0$ $\frac{du_c}{dt}(0^+) = e^0(-A\Omega\sin 0 + B\Omega\cos 0) - \lambda e^0(A\cos 0 + B\sin 0)$

$\Rightarrow \left(\frac{du_c}{dt}\right)(0^+) = B\Omega - \lambda A = 0$

$\Rightarrow B = \frac{\lambda A}{\Omega}$

$A = U_{c0} \Rightarrow B = \frac{\lambda U_{c0}}{\Omega}$

Remarque 5

Decrement log van doc 18.

Points de contact de la courbe avec $Ke^{-\lambda t}$ obtenues pour $\cos(\Omega t + \varphi) = +1$

$\Rightarrow$ séparés de $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ pseudo période.

$\frac{U_c(t+T)}{u_c(t)} = \frac{Ke^{-\lambda(t+T)}}{Ke^{-\lambda t}} = e^{-\lambda T}$

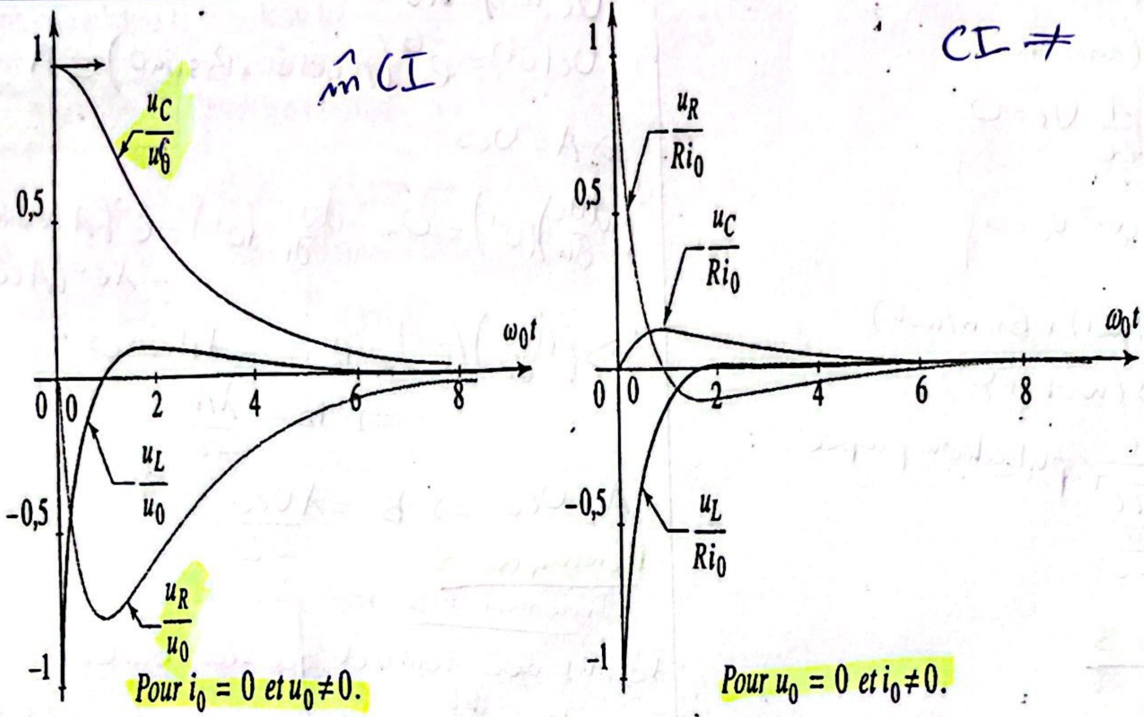
$\Rightarrow \ln\left(\frac{u_c(t+T)}{u_c(t)}\right) = -\lambda T$

$\Rightarrow \delta = \ln\left(\frac{U_c(t)}{U_c(t+T)}\right) = \lambda T$

$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ ie $-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$

b) $\Delta > 0$ Régime apériodique 2 solutions réelles r_1 et r_2 $\boxed{\lambda > \omega_0}$ ou $\boxed{Q < \frac{1}{2}}$ ou $\boxed{R > R_C}$

$\boxed{u_C(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}}$ A, B constantes réelles.



Doc. 15. d.d.p. *aux bornes des trois dipôles : régimes apériodiques* $Q = 0{,}4$.

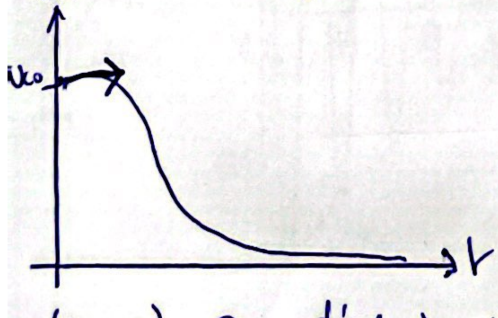
Cf I_2 $r = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$

2 racines $\begin{cases} r_1 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} < 0 \\ r_2 = -\lambda + \underbrace{\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}}_{< \lambda^2} < 0 \end{cases}$

2 racines réelles negatives $e^{r_1 t} \xrightarrow[\infty]{} 0$ et $e^{r_2 t} \xrightarrow[\infty]{} 0$

donc $U_C(t) \xrightarrow[\infty]{} 0$

$U_C(0^+) = U_{C0}$ $\frac{du_C}{dt}(0^+) = 0$

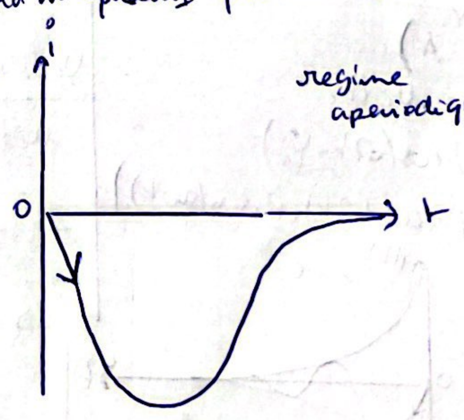


$i(t = 0^+) = 0$ $\frac{di}{dt}(0^+) = -\frac{U_0}{L}$

i vérifie la m̂ equa dif que u_C $i(t) = A_1 e^{r_1 t} + B_1 e^{r_2 t}$

$i \xrightarrow[\infty]{} 0$

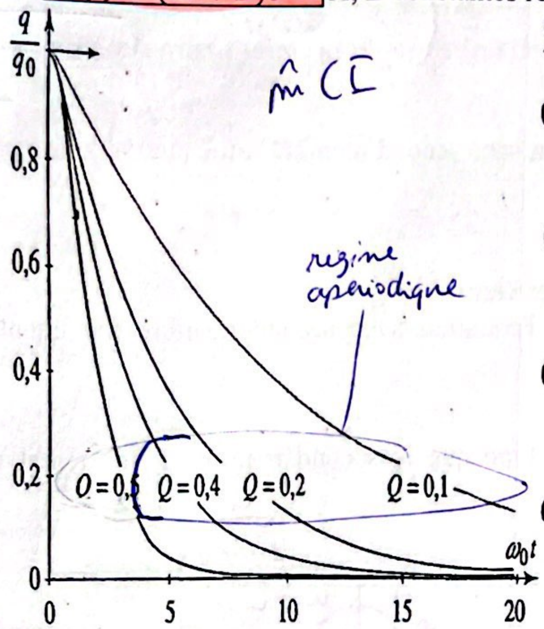
régime apériodique.



c) $\Delta = 0$: Régime critique   1 solution double réelle $r_0 = -\lambda$ $\boxed{Q = \frac{1}{2}}$ ou $\boxed{\lambda = \omega_0}$ ou $\boxed{R = R_C}$

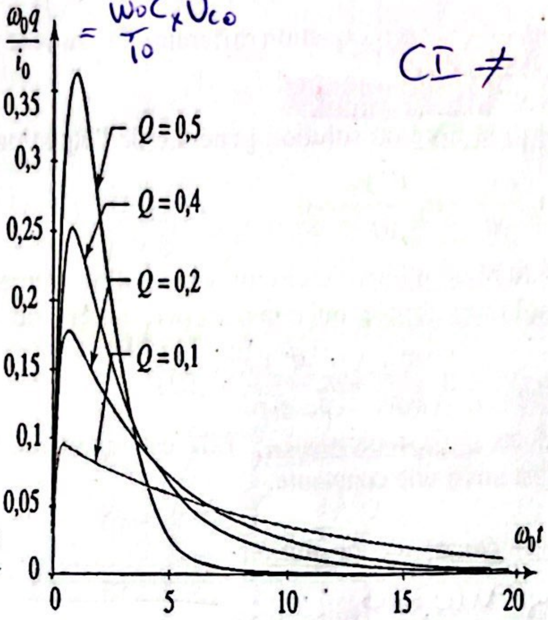
$u_C(t) = (At + B)e^{-\lambda t}$ A, B constantes réelles.

$\frac{u_c}{u_{c0}} = \frac{q}{q_0}$ $\hat{m}$ CI



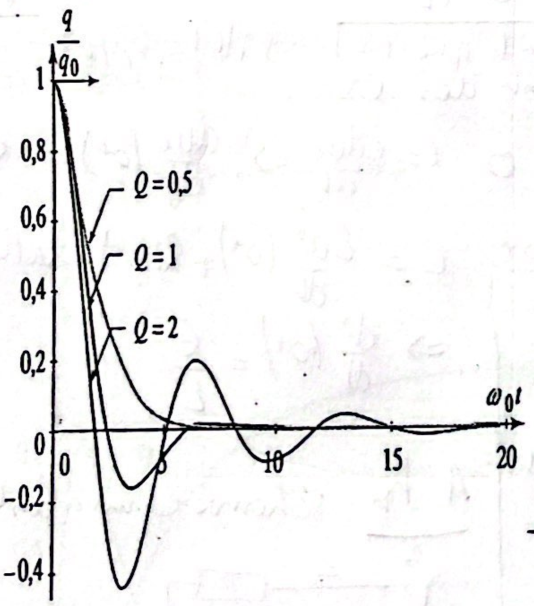
Conditions initiales ($q_0 \neq 0,\ i_0 = 0$).

$\frac{\omega_0 q}{i_0} = \frac{\omega_0 C_x U_{c0}}{I_0}$ CI $\neq$

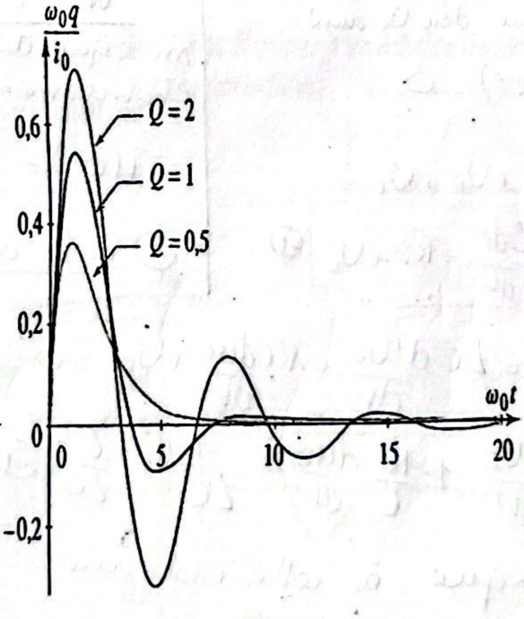


Conditions initiales ($q_0 = 0,\ i_0 \neq 0$).

Doc. 14. *Régimes apériodique ($Q < 0,5$) et critique ($Q = 0,5$).*

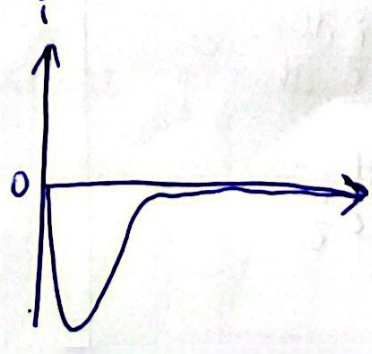


Doc. 20. *Régimes pseudo-périodique et critique. Condensateur initialement chargé $i(0) = 0$.*



Doc. 21. *Régimes pseudo-périodique et critique. Intensité initiale i_0 dans le circuit.*

Regime qui tend le plus rapidement vers 0
Limite théorique entre le regime pseudo periodique et aperiodique.



II Réponse à un échelon de tension

1.) Les équations différentielles

on cherche (tension/courant)

Généralisation : Commande f(t) Réponse y(t)

$$\boxed{a_0 y + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} = f(t)}$$ Equation différentielle du second ordre **(ou du premier ordre si a_2=0)**

Solution complète : $\boxed{y(t) = y_\ell(t) + y_f(t)}$

- $y_\ell(t)$ est la solution libre ou solution générale de l'équation sans second membre (ou équation homogène)

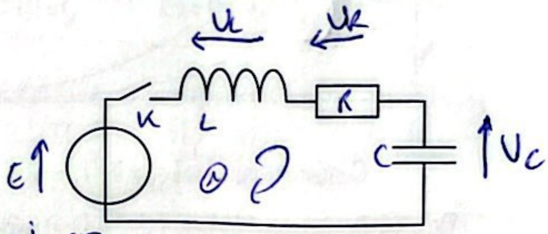
$$a_0 y_\lambda + a_1 \frac{dy_\lambda}{dt} + a_2 \frac{d^2 y_\lambda}{dt^2} = 0$$

Elle correspond au régime libre du circuit (c'est-à-dire sources éteintes).

- $y_f(t)$ est la solution forcée ou solution particulière de l'équation avec second membre (ou équation complète) $a_0 y_f + a_1 \frac{dy_f}{dt} + a_2 \frac{d^2 y_f}{dt^2} = f(t)$

Elle correspond au régime permanent. Elle est du même type que le second membre : Si f(t) est une constante, $y_f(t)$ est aussi une constante.

2.) Mise en équation et résolution



A $t=0^-$ C déchargé $U_C(0^-)=0$
K ouvert depuis longtemps
$i(0^-)=0$ $E_L=\frac{1}{2}Li^2$ est continue donc i aussi;
$E_C=\frac{1}{2}Cu_C^2$ est continue donc U_C aussi
$U_C(0^+)=0$ $i(0^+)=0$

Equation de maille. $E = U_L + U_R + U_C$

$$\Rightarrow \boxed{E = L\frac{di}{dt} + Ri + U_C} \quad ①$$

or $i = C\frac{du_C}{dt}$ $\Rightarrow E = LC\frac{d^2U_C}{dt} + RC\frac{du_C}{dt} + U_C = 0$

$$\Rightarrow \frac{d^2U_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC}U_C = \frac{E}{LC} \quad ①'$$

- $U_{C\ell}$ est identique à celle obtenue au ①
- U_{Cf} est du même type que le 2nd membre

$U_{Cf} = E \Rightarrow U_C(t) = U_\ell(t) + U_f(t)$

On dérive ① $L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{du_C}{dt} = 0$

or $\frac{du_C}{dt} = \frac{i}{C}$ $\Rightarrow L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0$

$\Rightarrow \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{i}{CL} = 0$

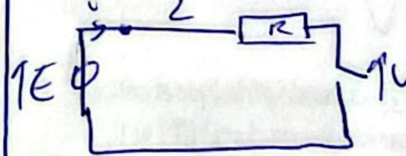
m̂ équa dif que (I) $\Rightarrow i(t) = i_\ell(t)$
changement des CI.

$i(0^+) = 0$ $i = C\frac{du_C}{dt} \Rightarrow \frac{du_C}{dt}(0^+) = 0$

① à $t=0^+$ $E = L\frac{di}{dt}(0^+) + Ri(0^+) + U_C(0^+)$

$\Rightarrow \frac{di}{dt}(0^+) = \frac{E}{L}$

À t_∞ schéma équivalent L = fil, C = circuit ouvert



$i(t_\infty) = 0$

équation maille) $E = U_L + U_R + U_C$

$\Rightarrow U_C(t_\infty) = E$

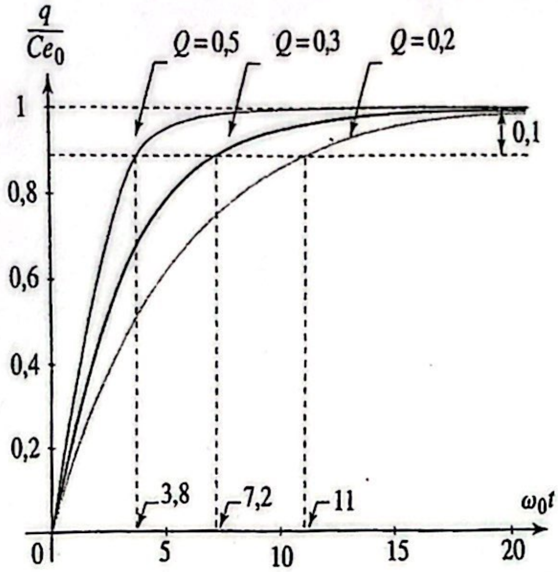
$\Delta < 0 \quad u_C(t) = \exp(-\lambda t)\cdot\left[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right] + E = K\exp(-\lambda t)\cos(\Omega t + \varphi) + E$

$\Delta > 0 \quad u_C(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} + E$

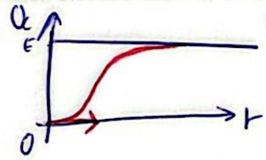
$\Delta = 0 \quad u_C(t) = (At + B)e^{-\lambda t} + E$

i(t) même expression qu'au (I)

3.) Les résultats

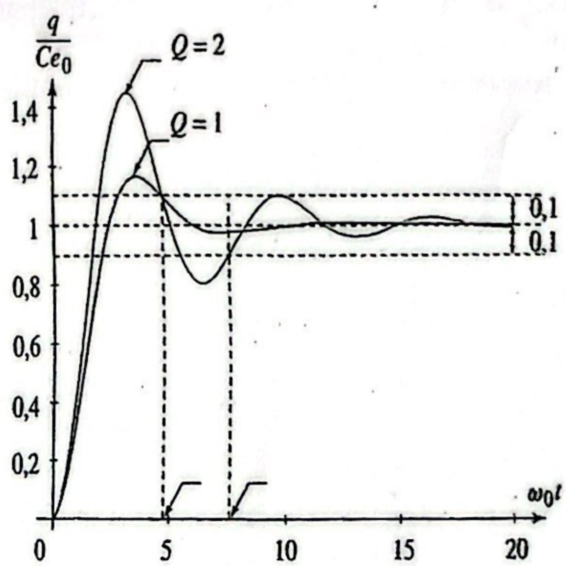


Doc. 35a. *Réponse à un échelon de tension. Régimes apériodiques.*

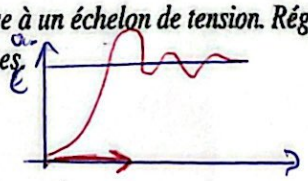


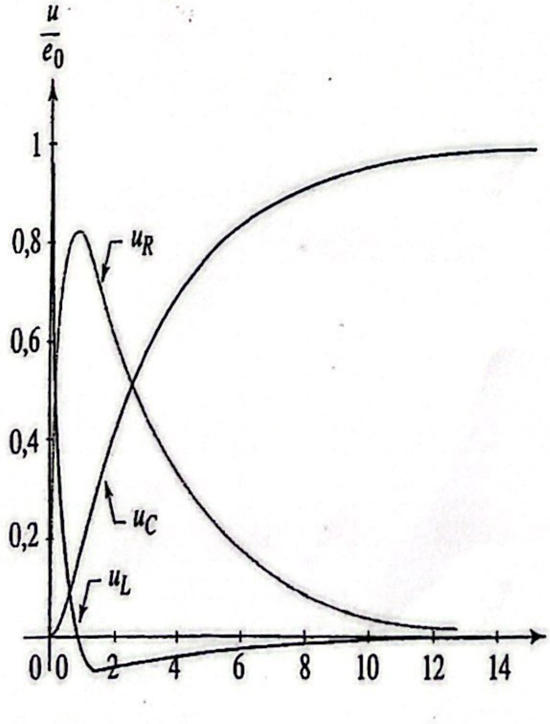
$u_C(0^+) = 0$

$\frac{du_C}{dt}(0^+) = 0$

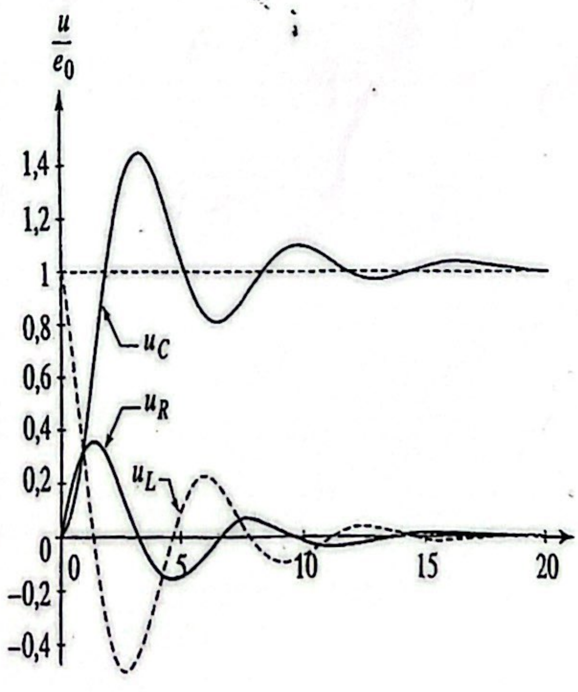


Doc. 36a. *Réponse à un échelon de tension. Régimes pseudo-périodiques.*

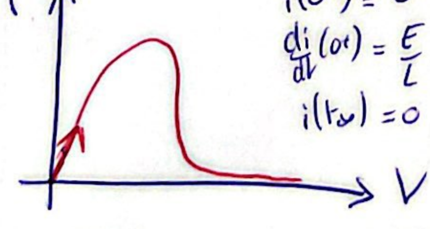




Doc. 35c. *Réponse à un échelon de tension. Q = 0,3.*



Doc. 36c. *Réponse à un échelon de tension. Q = 2.*



$i(0^+) = 0$

$\frac{di}{dt}(0^+) = \frac{E}{L}$

$i(t_\infty) = 0$