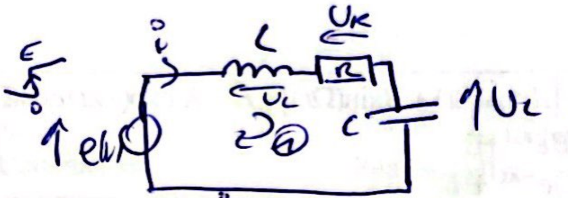
4.) Bilan énergétique



① $e = U_L + U_R + U_C$

$\Rightarrow ei = iU_L + iU_R + iU_C$

$\Rightarrow ei = Li\frac{di}{dt} + U_C i + Ri^2$

$\Rightarrow ei = Li\frac{di}{dt} + CU_C\frac{dU_C}{dt} + Ri^2$

$\Rightarrow ei = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}CU_C^2\right) + Ri^2$

$P_{\text{fournie par le géné}} = P_{\text{stockée } L+C} + P_{\text{dissipée par effet joule dans } R}$

$$\int_0^t ei\,dt = \int_0^t \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}CU_C^2\right)dt + \int_0^t Ri^2\,dt$$

$$\mathcal{E}_{\substack{\text{fournie géné}\\ 0\to t}} = \mathcal{E}_{\substack{\text{stockée } C+L\\ 0\to t}} + \mathcal{E}_{\substack{\text{dissipée par } R\\ 0\to t}}$$

$$\int_0^t ei\,dt = \left[\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}CU_C^2\right]_0^t + \int_0^t Ri^2\,dt$$

1er cas front montant

CI $\left| \begin{array}{ll} U_C(0^+) = 0 & U_C(+\infty) = E \\ i(0^+) = 0 & i(+\infty) = 0 \end{array}\right.$

$\mathcal{E}_{L\,0\to+\infty} = \left[\frac{1}{2}Li^2\right]_0^{+\infty} = 0$

$\mathcal{E}_{C\,0\to+\infty} = \left[\frac{1}{2}CU_C^2\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}CE^2$

$\mathcal{E}_{\text{géné}\,0\to+\infty} = \int_0^{+\infty} Ei\,dt = EC\int_0^{+\infty}\frac{dU_C}{dt}dt$

$\Rightarrow \mathcal{E}_{\text{géné}\,0\to+\infty} = CE\left[U_C\right]_0^{+\infty} = CE^2$

$\mathcal{E}_{R\,0\to+\infty} = \mathcal{E}_{\text{géné}\,0\to+\infty} - \mathcal{E}_{C\,0\to+\infty} = \frac{1}{2}CE^2$

2e cas : Front descendant

CI $\left| \begin{array}{ll} U_C(0^+) = E & U_C(+\infty) = 0 \\ i(0^+) = 0 & i(+\infty) = 0 \end{array}\right.$

$\mathcal{E}_{\text{géné}\,0\to+\infty} = \int_0^{+\infty} ei\,dt = 0$

$\mathcal{E}_{L\,0\to+\infty} = 0$

$\mathcal{E}_{C\,0\to+\infty} = -\frac{1}{2}CE^2$

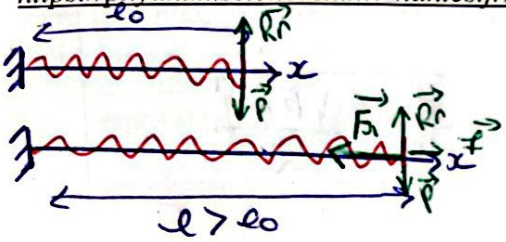
$\mathcal{E}_{R\,0\to+\infty} = \frac{1}{2}CE^2$

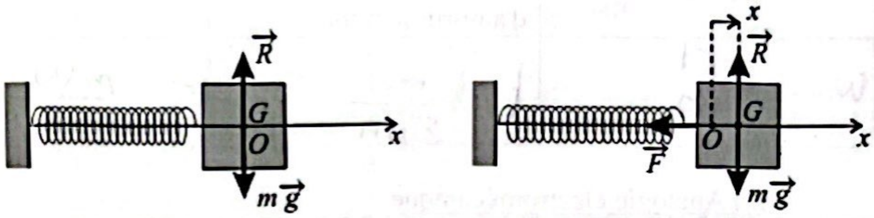
C fournit de l'énergie qui est dissipée sous forme de chaleur par .

III Oscillateur amorti avec frottement visqueux

1.) Mise en équation

https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Meca/Oscillateurs/oscillateur_horizontal.php





équilibre — mouvement

- Système (ANNEAU M(m))
- Référentiel terrestre galiléen.
- Force Bilan : • Poids $\vec{P} = m\vec{g}$ • $\vec{R_n}$ ($\perp$ au support en l'absence de frottements solides)
  - $\vec{F_r} = -k(l - l_0)\vec{e_x}$ force de rappel du ressort.
  - $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$ force de frottement fluide $\alpha > 0$ coef de frottement fluide

A l'equilibre $\sum \vec{F} = \vec{0}$

En projection sur (Ox) $-k(l_{eq} - l_0) = 0$

$\Rightarrow l_{eq} = l_0$

2e Loi de Newton. $m\vec{a} = \sum \vec{F}$

$\vec{OM} = x\vec{e_x}$ ou $x = l - l_0$

$\vec{v} = \dot{x}\vec{e_x}$

$\vec{a} = \ddot{x}\vec{e_x}$

En projection sur (Ox)

$m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x}$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0} \quad (1)$$

Forme canonique (a) $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

(b) $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

equation caractéristique $r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$

$\Delta = 4\lambda^2 - 4\omega_0^2$
$= 4(\lambda^2 - \omega_0^2)$

$\Delta < 0$ $r = -\lambda \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ $\rightarrow \lambda < \omega_0$

$\Delta > 0$ $r = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$ $\rightarrow \lambda > \omega_0$

$\Delta = 0$ $r = -\lambda$ $\rightarrow \lambda = \omega_0$

Remarque (CfSE3) Pour $\alpha = 0$, en l'abscence de frottements $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$

$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) = a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t)$

$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$ rad/s pulsation propre.

(a) $2\lambda = \frac{\alpha}{m} \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{\alpha}{2m}}$ s^{-1} coef d'amortissement

(b) $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\alpha}{m} \Rightarrow \boxed{Q = \frac{m\omega_0}{\alpha}}$ sans unité

* $Q = \frac{m\omega_0}{\alpha} \times \frac{\omega_0}{\omega_0} = \frac{m}{\alpha\omega_0} \times \frac{k}{m} = \frac{k}{\alpha\omega_0}$ $\boxed{Q = \frac{k}{\alpha\omega_0}}$
* $Q = \frac{m}{\alpha}\sqrt{\frac{k}{m}}$ car $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ $\boxed{Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}}$

$\boxed{\dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{\alpha}{m}\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{k}{m}x=0}$ Formes canoniques : $\boxed{\dfrac{d^2x}{dt^2}+2\lambda\dfrac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0}$ ou $\boxed{\dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0}$

Pulsation propre	Coefficient d'amortissement	Facteur de qualité
$W_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$	$\lambda=\frac{\alpha}{2m}$	$Q=\frac{mW_0}{\alpha}=\frac{k}{\alpha W_0}=\frac{\sqrt{km}}{\alpha}$

2.) Analogie électromécanique

Mécanique	Electricité
Equation différentielle : $\ddot{x}+\frac{\alpha}{m}\dot{x}+\frac{k}{m}x=0$	$\ddot{q}+\frac{R}{L}\dot{q}+\frac{1}{LC}q=0$
2 formes canoniques.	
Pulsation propre : $W_0^2=\frac{k}{m}$ $W_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$	$W_0^2=\frac{1}{LC}$ $W_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$
Facteur de qualité $\frac{W_0}{Q}=\frac{\alpha}{m}\Rightarrow Q=\frac{mW_0}{\alpha}$	$\frac{W_0}{Q}=\frac{R}{L}\Rightarrow Q=\frac{LW_0}{R}$
Elongation : x	charge $q=CU_C$
Vitesse : $v=\dot{x}$	intensité $i=\frac{dq}{dt}$
Masse : m	inductance L
Coefficient de frottement fluide : $[\alpha]=[\frac{F}{v}]$ Ns/m α (frott fluide)	R (resistance)
Raideur du ressort : N/m k (constante de raideur)	Inverse de la capacité $\frac{1}{C}$
Energie mécanique : $E_m=E_C+E_p$ $E_m=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2$ où $x=l-l_0$	Energie stockée $\mathcal{E}_{L+C}=\frac{1}{2}Li^2+\frac{1}{2}CU_C^2$ or $u=\frac{q}{C}\Rightarrow\mathcal{E}_{L+C}=\frac{1}{2}Li^2+\frac{1}{2}\left(\frac{q}{C}\right)^2$

3.) Solutions

a) Régime pseudo-périodique

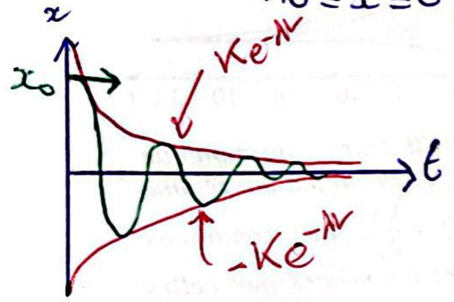
$\Delta<0$ $\quad \lambda < \omega_0$	ou	$Q > \frac{1}{2}$

$$\Omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

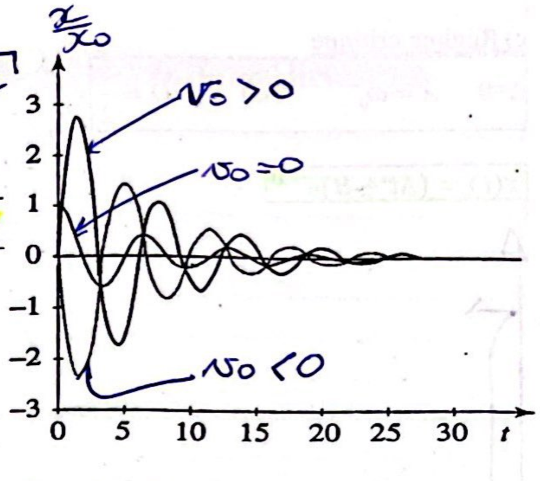
pseudo pulsation

$$x(t) = \exp(-\lambda t)\cdot\left[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right] = K\exp(-\lambda t)\cos(\Omega t + \varphi)$$

CI : à $t=0$ $\left|\begin{array}{l} x = x_0 \\ v = \dot{x} = 0 \end{array}\right\}$ Valable pour les trois régimes.



pseudo période $T = \frac{2\pi}{\Omega}$



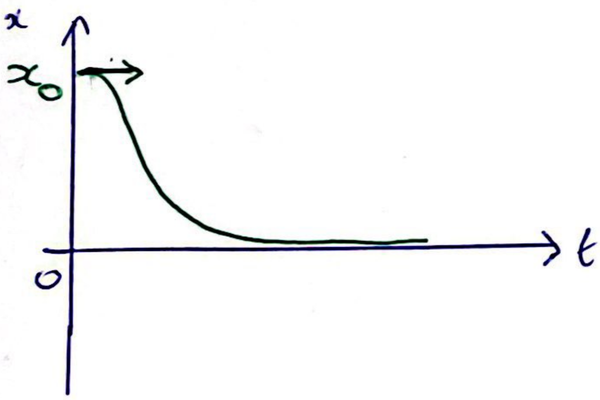
Doc. 12. *Oscillateur harmonique amorti par frottement fluide : régime pseudo-périodique* $\left(Q > \frac{1}{2}\right)$.

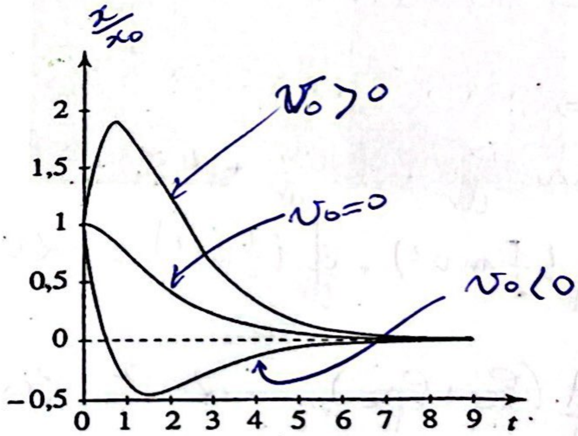
Le mobile est lâché en $x = x_0$ avec une vitesse v_0 positive, nulle ou négative pour les trois cas apparaissant sur la figure.

b) Régime apériodique

$\Delta>0$ $\quad \lambda > \omega_0$	ou	$Q < \frac{1}{2}$

$$x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$



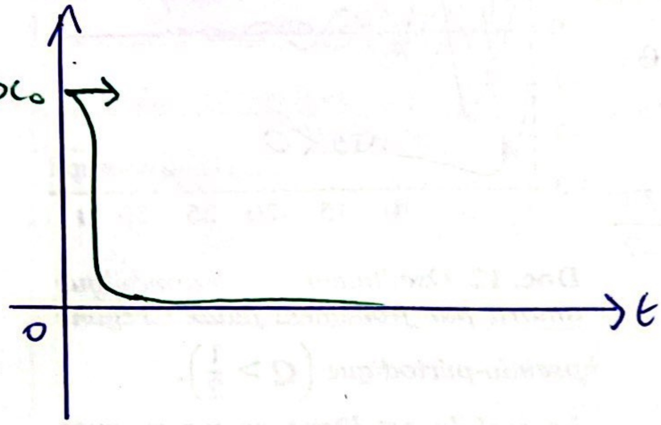


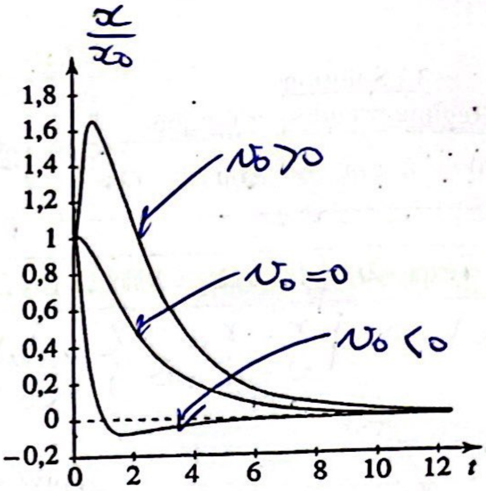
Doc. 17. *Oscillateur harmonique amorti par frottement fluide : régime apériodique* $\left(Q < \frac{1}{2}\right)$ *suivant les conditions initiales, l'élongation passe par un extremum ou tend uniformément vers zéro.*

c) Régime critique

$$\boxed{\Delta=0 \qquad \lambda=\omega_0 \qquad \text{ou} \qquad Q=\frac{1}{2}}$$

$$x(t) = (At+B)e^{-\lambda t}$$





Doc. 15. *Oscillateur harmonique amorti par frottement fluide : régime critique* $\left(Q=\frac{1}{2}\right)$. *Les conditions initiales sont les mêmes que celles du mouvement pseudo-périodique (doc. 12). Dans tous les cas, le retour à l'équilibre s'effectue plus rapidement.*

4.) Bilan énergétique

LFD $m\ddot{x} = \alpha\dot{x} - kx$

$\Rightarrow m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0$

$\times v \downarrow$

$\Rightarrow m\ddot{x}\dot{x} + \alpha\dot{x}^2 + kx\dot{x} = 0$

$\Rightarrow mv\frac{dv}{dt} + kx\frac{dx}{dt} + \alpha v^2 = 0$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = -\alpha v^2$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}(E_c + E_{pe}) = -\alpha v^2 < 0$

$\Rightarrow \frac{dE_m}{dt} \leq 0$ où $E_m = E_p + E_c$

*Diminution de l'énergie mé-canique à cause de la force de frottement fluide

*Dissipation d'énergie sous forme de chaleur.

Rq $\frac{d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)}{dt}$