

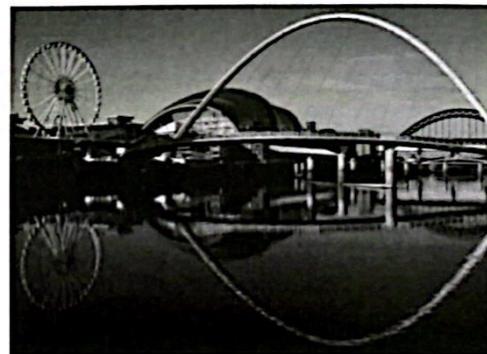
I Le régime sinusoïdal forcé .....	2
1.) Exemple : Circuit RLC série.....	2
2.) Méthode de résolution .....	2
3.) Représentation d'une grandeur sinusoïdale .....	3
II Circuits électriques en régime sinusoïdal forcé .....	4
1.) Position du problème .....	4
2.) Impédances et admittances .....	4
III Le circuit RLC série. Etude de l'intensité.....	7
IV Le circuit RLC série. Etude de la tension aux bornes du condensateur .....	9
V L'oscillateur harmonique amorti .....	11

### Millennium Bridge (Londres) [https://fr.wikipedia.org/wiki/Millennium\\_Bridge\\_\(Londres\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Millennium_Bridge_(Londres))

Le pont a été inauguré le 10 juin 2000, avec deux mois de retard et un supplément de 2,2 millions de livres sur un budget initial de 18,2 millions de livres. Cependant il a dû être fermé au public deux jours plus tard, en raison d'un phénomène de résonance, le pont oscillant latéralement de façon imprévue. Ce jour-là, une marche caritative devant traverser le pont attira beaucoup de monde. Les mouvements de balancement furent provoqués par le grand nombre de piétons (90 000 personnes le premier jour avec jusqu'à 2 000 personnes en même temps sur le pont). Les premières vibrations encourageaient et parfois obligeaient les piétons à marcher au rythme du balancement, ce qui accentua les oscillations, même en début de journée lorsque le pont était relativement peu chargé.

Ce mouvement de balancement lui a valu le surnom de *Wobbly Bridge* (pont bancal). Les mesures prises pour limiter le nombre de personnes traversant le pont ont entraîné de longues files d'attente, mais n'ont atténué ni l'enthousiasme du public pour ce *manège qui décoiffe*, ni les vibrations elles-mêmes. La fermeture du pont après seulement trois jours d'ouverture a été sévèrement critiquée par le public, qui associait ce retard à celui dont avait souffert le Dôme du Millenium.

Les phénomènes de résonance des ponts suspendus avaient été bien étudiés depuis la catastrophe du pont du détroit de Tacoma (Washington, États-Unis). Néanmoins peu d'attention avait été prêtée au mouvement latéral produit par des piétons, provoqué par la réaction humaine à des petits mouvements latéraux dans le pont, entraînant un mouvement de pulsion qui n'avait pas été anticipé dans l'analyse statistique avant la construction. On a pensé que le profil exceptionnellement bas des câbles de suspension a contribué au problème, mais une étude menée par des ingénieurs prouve que l'oscillation peut se produire sur n'importe quel pont à suspension ou autre, soumis à un grand mouvement de foule.



Le problème a été résolu par l'installation d'amortisseurs hydrauliques et de masse pour contrôler les oscillations horizontales et latérales. Les travaux ont été menés de mai 2001 à janvier 2002. Après une période d'essai, le pont a été rouvert au public le février 2002 ; depuis, aucune vibration importante n'a été signalée.

### Pont du détroit de Tacoma (1940) [https://fr.wikipedia.org/wiki/Pont\\_du\\_d%C3%A9troit\\_de\\_Tacoma\\_\(1940\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Pont_du_d%C3%A9troit_de_Tacoma_(1940))

Le **pont du détroit de Tacoma** ou **pont de Tacoma**, est un pont suspendu qui reliait les villes de Tacoma et de Gig Harbor dans l'État de Washington. Inauguré le 1<sup>er</sup> juillet 1940, il s'effondre le 7 novembre 1940 lors d'un des plus célèbres accidents de génie civil, sans avoir fait toutefois de victimes.

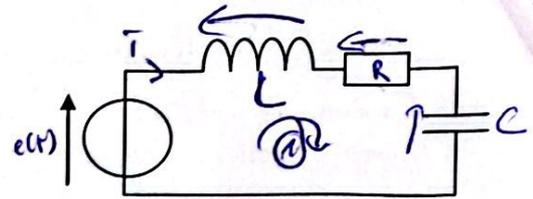
Lors de la rupture de l'ouvrage, la vitesse du vent était d'environ 65 km/h. Des oscillations de grande amplitude en torsion sont apparues à 10 h, menant à l'effondrement du pont à 11 h 10. Le pont avait été dimensionné pour résister au vent, mais en ne tenant compte que des effets statiques<sup>1</sup>. En raison du couplage aéroélastique, un échange d'énergie mécanique se produit entre le vent et le pont qui oscille. On dit que le pont est stable lorsque l'énergie mécanique est transférée du pont vers le vent qui la dissipe. Lorsqu'un événement extérieur engendre une petite oscillation initiale, par exemple le passage d'un camion ou une rafale de vent, alors cette oscillation va s'amortir. De plus, le vent n'est jamais parfaitement constant : les petites variations de vitesse autour de la vitesse moyenne suffisent à produire de petites oscillations. Mais si la vitesse moyenne du vent est suffisamment élevée, au-dessus de ce que l'on appelle la « vitesse critique », le pont est instable, et l'oscillation initiale s'amplifie. L'énergie se transfère alors du vent vers le pont, et les oscillations s'amplifient en raison du couplage aéroélastique, jusqu'à la ruine. Ce mécanisme n'était connu en 1940 que pour les structures d'avions (ailes, fuselage, empennage...), personne n'avait alors envisagé ce scénario pour des ponts suspendus<sup>3</sup>.

### Pont de la Maine Angers : [https://fr.wikipedia.org/wiki/Pont\\_de\\_la\\_Basse-Chaîne#La\\_catastrophe\\_de\\_1850](https://fr.wikipedia.org/wiki/Pont_de_la_Basse-Chaîne#La_catastrophe_de_1850)

## I Le régime sinusoïdal forcé

### 1.) Exemple : Circuit RLC série

<https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Elec/Filtres/filtre.php>



eq matle ①:

$$e(t) = U_L + U_R + U_C$$

$$\Rightarrow e(t) = L \frac{di}{dt} + Ri + U_C \quad \text{① où } i = C \frac{dU_C}{dt} \text{ (CVR)}$$

$$\Rightarrow e(t) = LC \frac{d^2 U_C}{dt^2} + RC \frac{dU_C}{dt} + U_C$$

$$\Rightarrow \left[ \frac{d^2 U_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{LC} U_C = \frac{e(t)}{LC} \right] \quad \text{②}$$

signal sinusoïdal  $e(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi_e)$  (667)

$e(t)$  pris comme référence des phases:  $\varphi_e = 0$

$$e(t) = E_m \cos(\omega t) \quad \omega = 2\pi f$$

On dérive ②:

$$\frac{de(t)}{dt} = L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{dU_C}{dt} \quad \text{or } \frac{dU_C}{dt} = \frac{i}{C}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = \frac{de(t)}{dt} \times \frac{1}{L}$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{Rq: } U_R = Ri \\ \text{(KR)} \Rightarrow \frac{d^2 U_R}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dU_R}{dt} + \frac{1}{LC} U_R = \frac{R}{L} \frac{de(t)}{dt} \end{array} \right)$$

### 2.) Méthode de résolution

On considère un système linéaire, soumis à une excitation sinusoïdale  $e(t) = E_m \cos(\omega t)$

La réponse  $s(t)$  est donnée par une équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$a_0 s + a_1 \frac{ds}{dt} + a_2 \frac{d^2 s}{dt^2} = f(t)$$

où  $f(t)$  est une fonction connue de l'excitation  $e(t)$  et de ses dérivées temporelles :  $f(t) = F_m \cos(\omega t + \varphi_f)$

La solution de l'équation est  $s(t) = s_l(t) + s_f(t)$

•  $s_l(t)$  est la **solution libre** ou solution générale de l'équation sans second membre (ou équation homogène)

$$a_0 s + a_1 \frac{ds}{dt} + a_2 \frac{d^2 s}{dt^2} = 0$$

Elle correspond au **régime libre** du circuit (c'est-à-dire sources éteintes). Elle s'amortit au bout de quelques temps. On ne s'y intéressera pas dans la suite de ce chapitre.  $\rightarrow$  cf SEQ.

•  $s_f(t)$  est la **solution forcée** ou solution particulière de l'équation avec second membre (ou équation complète) Elle correspond au **régime permanent**.

Elle est du même type que le second membre : c'est donc une fonction sinusoïdale, de même pulsation que  $e(t)$ , indépendante des conditions initiales.  $s_f(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi_s)$

$s_f$  correspond au régime sinusoïdal forcé.  $\varphi_s$  est l'avance de phase de  $s$  par rapport à  $e$ .

En régime sinusoïdal, toutes les grandeurs étudiées sont sinusoïdales de même pulsation que l'excitation.

3.) Représentation d'une grandeur sinusoïdale

a) Représentation temporelle

Grandeur sinusoïdale :  $g(t) = G_m \cos(\omega t + \varphi)$

Amplitude  $G_m$

Valeur crête à crête (ou pic à pic)  $G_{cc} = 2 G_m$

Valeur efficace (en régime sinusoïdal)  $G_{eff} = \frac{G_m}{\sqrt{2}}$

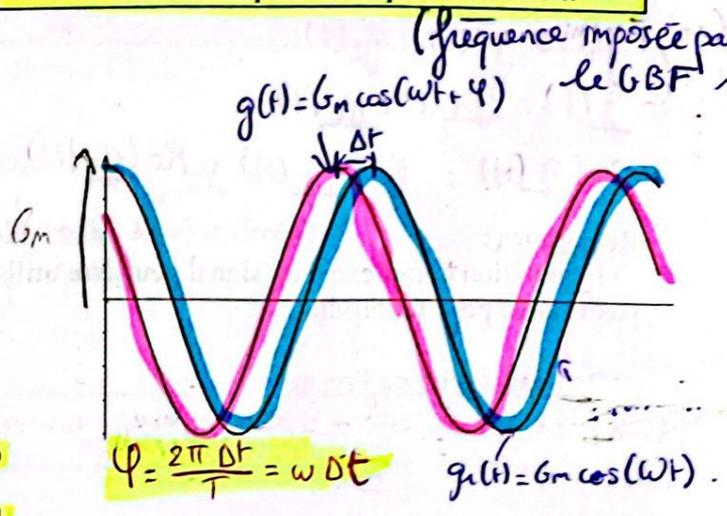
Pulsation (en rad.s<sup>-1</sup>)  $\omega$

Période  $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Fréquence  $f = \frac{1}{T}$

Phase instantanée  $\omega t + \varphi$

Avance de phase à l'origine  $\varphi$



b) Représentation complexe

$j^2 = -1$  et  $j = \exp(j\pi/2)$

La représentation complexe de  $g(t) = G_m \cos(\omega t + \varphi)$  est la fonction complexe

$\underline{g}(t) = G_m e^{j(\omega t + \varphi)} = G_m e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \underline{G}_m e^{j\omega t}$

où  $\underline{G}_m = G_m e^{j\varphi}$  est l'amplitude complexe de  $\underline{g}(t)$ . Elle est indépendante du temps.

$\underline{g}(t) = G_m [\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)]$        $g(t) = \text{Re}(\underline{g})$

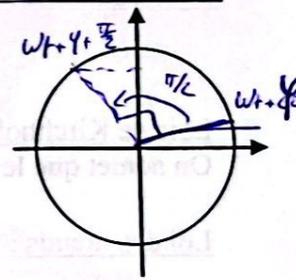
Module de  $\underline{G}_m$  :  $|\underline{G}_m| = G_m$  est l'amplitude de  $g(t)$

Argument de  $\underline{G}_m$  :  $\arg(\underline{G}_m) = \varphi$  est l'avance de phase à l'origine de  $g(t)$ .

Dériver une fonction complexe sinusoïdale revient à la multiplier par  $j\omega$

$\frac{dg}{dt} = -G_m \omega \sin(\omega t + \varphi)$   
 $\frac{d\underline{g}}{dt} = j\omega G_m e^{j(\omega t + \varphi)} = j\omega \underline{g}$   
 $\frac{d\underline{g}}{dt} = e^{j\pi/2} \omega G_m e^{j(\omega t + \varphi)}$   
 $\text{Re}(\frac{d\underline{g}}{dt}) = \omega G_m \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$

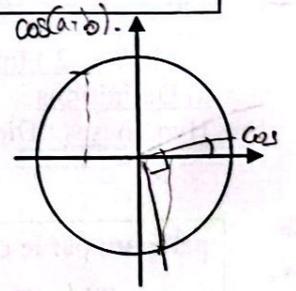
$\text{Re}(\frac{d\underline{g}}{dt}) = -\omega G_m \sin(\omega t + \varphi)$   
 $\text{Re}(\frac{d\underline{g}}{dt}) = \frac{dg}{dt}$



Intégrer une fonction complexe sinusoïdale revient à la diviser par  $j\omega$

$\int g(t) dt = \frac{G_m}{\omega} \sin(\omega t + \varphi)$   
 $\int \underline{g}(t) dt = \frac{1}{j\omega} G_m e^{j(\omega t + \varphi)} = \frac{\underline{g}}{j\omega}$   
 $= \frac{e^{-j\pi/2}}{\omega} G_m e^{j(\omega t + \varphi)}$   
 $= \frac{G_m}{\omega} e^{j(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})}$

$\text{Re}(\int \underline{g}(t) dt) = \frac{G_m}{\omega} \cos(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})$   
 $\text{Re}(\int \underline{g}(t) dt) = \frac{G_m}{\omega} \sin(\omega t + \varphi)$



Notation de Laplace :  $p = j\omega$

## Somme de deux fonctions de même pulsation

$$g(t) = g_1(t) + g_2(t)$$

$$\underline{g}(t) = \underline{g}_1(t) + \underline{g}_2(t)$$

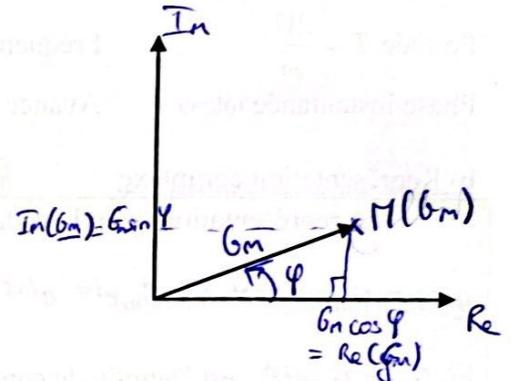
$$\text{Re}(\underline{g}(t)) = \text{Re}(\underline{g}_1(t)) + \text{Re}(\underline{g}_2(t))$$

### Remarques :

1) La notation complexe d'un signal peut-être utilisée lorsqu'on effectue des opérations linéaires. Elle n'est pas valable pour un produit.

### 2) Représentation de Fresnel :

Représentation de  $\underline{G}_m = G_m e^{j\varphi}$  ds le plan complexe



## II Circuits électriques en régime sinusoïdal forcé

### 1.) Position du problème

- on considère un dipôle **linéaire**, constitué de dipôles R, L et C en série ou en parallèle.
- on l'alimente par un générateur délivrant une excitation sinusoïdale (tension ou courant).

$$e(t) = E_m \cos(\omega t)$$

Hypothèses : Régime quasi-stationnaire = On peut négliger les temps de propagation des signaux (courant et tension dans les fils) et les dimensions du circuit sont petites devant la longueur d'onde  $\lambda = cT$

Lois de Kirchhoff Ce sont des expressions linéaires faisant intervenir  $i$  et  $u$ .

On admet que les lois de Kirchhoff s'écrivent de la même façon en utilisant la notation complexe.

Loi des nœuds :  $\sum_k \varepsilon_k i_k(t) = 0$  ou  $\sum_k \varepsilon_k \underline{I}_{km} = 0$   $\varepsilon = \begin{cases} +1 & \text{si il se dirige vers le nœud} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$

$$\underline{i}_k = \underline{I}_{km} e^{j\omega t} \quad \text{depend pas de } k$$

Loi des mailles :  $\sum_k \varepsilon_k u_k(t) = 0$  ou  $\sum_k \varepsilon_k \underline{U}_{km} = 0$   $\varepsilon = \begin{cases} +1 & \text{si dans le } n^{\text{e}} \text{ sens que maille} \\ -1 & \text{mon.} \end{cases}$

$$\underline{u}_k = \underline{U}_{km} e^{j\omega t}$$

### 2.) Impédances et admittances

#### a) Définitions

Hypothèses : Dipôle linéaire passif en convention récepteur



parcouru par le courant  $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) \sim \underline{i}(t) = I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)} = I_m e^{j\varphi_i} e^{j\omega t} = \underline{I}_m e^{j\omega t}$

où  $\underline{I}_m = I_m e^{j\varphi_i}$  est l'amplitude complexe

ayant à ses bornes la tension  $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u) \sim \underline{u}(t) = U_m e^{j(\omega t + \varphi_u)} = U_m e^{j\varphi_u} e^{j\omega t} = \underline{U}_m e^{j\omega t}$

où  $\underline{U}_m = U_m e^{j\varphi_u}$  est l'amplitude complexe

\*\*\*  $e^{j\omega t}$

**Impédance complexe du dipôle**  $\underline{Z} = \frac{u}{i} = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U_m e^{j\varphi_u}}{I_m e^{j\varphi_i}} = \frac{U_m}{I_m} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$

**Impédance du dipôle** :  $Z(\omega) = \frac{U_m}{I_m}$  car  $|e^{j\omega t}| = 1$

**Avance de phase de u par rapport à i** :  $\varphi(\omega) = \arg(\underline{Z}) = \varphi_u - \varphi_i$

**Résistance du dipôle** :  $R(\omega) = \Re(Z)$

**Réactance du dipôle** :  $X(\omega) = \Im(Z)$

$\underline{Z} = \frac{U_m}{I_m} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = \frac{U_m}{I_m} \cos(\varphi_u - \varphi_i) + j \frac{U_m}{I_m} \sin(\varphi_u - \varphi_i)$   
 $\rightarrow \underline{Z} = R(\omega) + j X(\omega)$   $|\underline{Z}| = \sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)}$

**Admittance complexe du dipôle**  $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{i}{u} = \frac{I_m}{U_m} = \frac{I_m}{U_m} e^{j(\varphi_i - \varphi_u)}$

**Admittance du dipôle** :  $Y(\omega) = \frac{I_m}{U_m}$    
 Siemens = S = Ω<sup>-1</sup>

**Avance de phase de i par rapport à u** :  $\varphi_Y = \arg(\underline{Y}) = \varphi_i - \varphi_u$

**Conductance du dipôle** :  $G(\omega) = \Re(Y)$

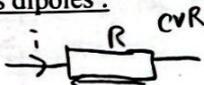
**Susceptance du dipôle** :  $B(\omega) = \Im(Y)$

$\underline{Y} = G(\omega) + jB(\omega)$   
 $|\underline{Y}| = \sqrt{G^2(\omega) + B^2(\omega)}$

$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$  par contre  $\left| \begin{matrix} G(\omega) + \frac{1}{R(\omega)} \\ B(\omega) + \frac{1}{X(\omega)} \end{matrix} \right|$

b) Impédance de quelques dipôles :

**Conducteur ohmique** :

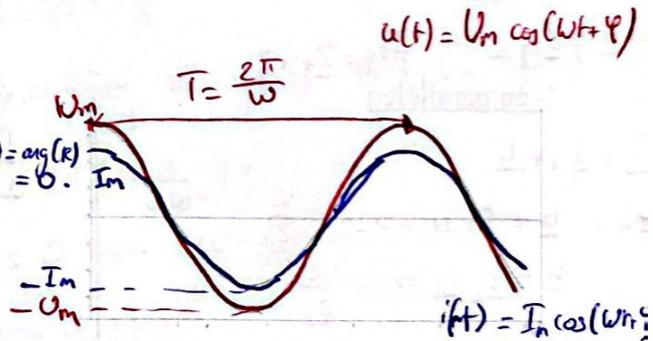


$i(t) = R \cdot i(t) \rightarrow u(t) = R \cdot i(t)$

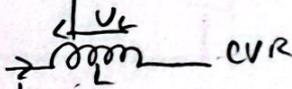
$\underline{Z}_R = \frac{u}{i} = \frac{U_m}{I_m} \Rightarrow \underline{Z}_R = \frac{u}{i} = R$

$|\underline{Z}_R| = \frac{U_m}{I_m} = R \Rightarrow U_m = R \cdot I_m$

$\varphi = \arg(\underline{Z}_R) = \varphi_u - \varphi_i$  et  $\arg(\underline{Z}_R) = \arg(R) = 0$   
 $\Rightarrow \varphi_u = \varphi_i$



**Bobine idéale d'inductance L**



$u(t) = L \frac{di}{dt} \rightarrow \underline{u}(t) = L \frac{di}{dt} = L j \omega i$

$\underline{Z}_L = \frac{u}{i} = jL\omega = L\omega e^{j\pi/2}$

$|\underline{Z}_L| = \frac{U_m}{I_m} = L\omega \Rightarrow U_m = L\omega I_m$

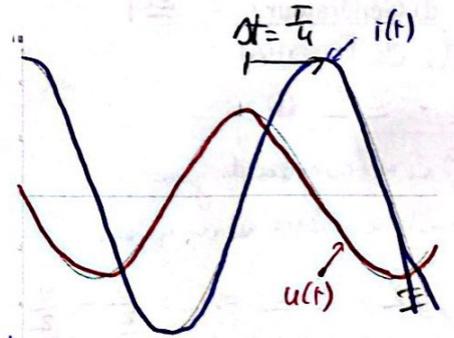
$\varphi = \arg(\underline{Z}_L) = \frac{\pi}{2} = \varphi_u - \varphi_i > 0$

$u(t)$  est en quadrature avance /  $i(t)$

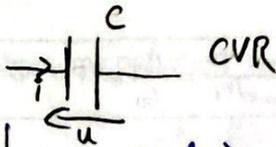
Or  $\varphi = \frac{2\pi \Delta t}{T} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Delta t = \frac{T}{4}$

Rg:  $U_m = L\omega \cdot I_m$   
 $\frac{U_m}{\omega} \rightarrow 0 \forall I_m \Rightarrow L \sim j\omega$   
 (cf régime continu)

$I_m \rightarrow 0 \forall U_m, L \sim \text{interrupt. ouvert}$



Condensateur idéal de capacité C :

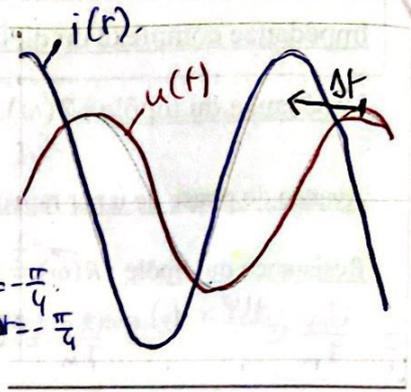


$\arg(z_c) = \varphi_u - \varphi_i = -\frac{\pi}{2}$

$\hookrightarrow u(t)$  est en quadrature retard

Rq:  $U_m = \frac{I_m}{\omega C} \Rightarrow I_m = \omega C U_m$

$\varphi = \frac{2\pi \omega t}{T} = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow \Delta t = -\frac{T}{4}$



$\omega \rightarrow 0 \forall U_m \Rightarrow CV$  int. ouvert

$\omega \rightarrow \infty \forall I_m \Rightarrow CV$  fil

$i = C \frac{du}{dt} \Rightarrow i = C \frac{d u}{dt}$   
 $i = C j \omega u$

$\Rightarrow Z_c = \frac{u}{i} = \frac{1}{j \omega C}$

$Z = \frac{U_m}{I_m} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$

$\Rightarrow |Z_c| = \frac{U_m}{I_m} = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow U_m = \frac{I_m}{\omega C}$

$Z_c = \frac{-j}{\omega C}$  car  $i = e^{j\omega t}$

c) Association de dipôles :

- en série :

$u = u_1 + u_2$

où  $\begin{cases} u_1 = Z_1 i \\ u_2 = Z_2 i \end{cases}$

$u = (Z_1 + Z_2) i$

$\Rightarrow u = Z_{eq} i$  où  $Z_{eq} = Z_1 + Z_2$

- en parallèle :

$i = i_1 + i_2$

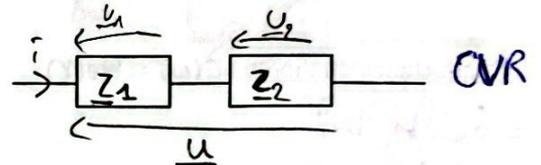
où  $\begin{cases} u = Z_1 i_1 \Rightarrow i_1 = \frac{u}{Z_1} \\ u = Z_2 i_2 \Rightarrow i_2 = \frac{u}{Z_2} \end{cases}$

$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \Rightarrow Y_{eq} = Y_1 + Y_2$

$\Rightarrow i = \frac{u}{Z_{eq}}$

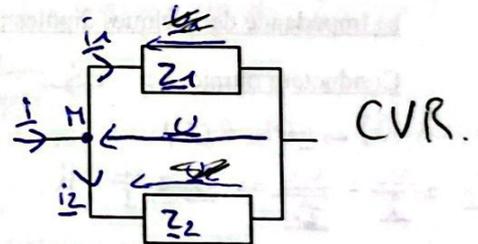
Pont diviseur de tension:

$\frac{u_1}{u} = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}$  pour  $i$  courant dans les 2 impédances



Pont diviseur de courant:

$\frac{i_1}{i} = \frac{\frac{1}{Z_1}}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}} = \frac{Y_1}{Y_1 + Y_2}$



d) Générateur :

Modèle de Thévenin:

$u = e - Z i$

$e$ : f.é.m complexe du géné

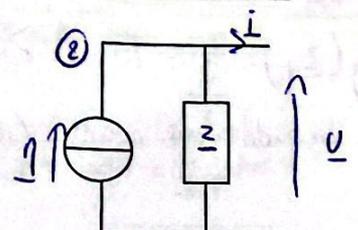
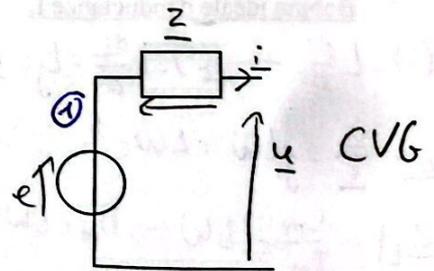
$Z$ : impédance interne du géné.

$\Leftrightarrow Z i = e - u \Rightarrow i = \frac{e}{Z} - \frac{u}{Z}$

$i = \eta - Y u$  où  $\eta = \frac{e}{Z}$  et  $Y = \frac{1}{Z}$

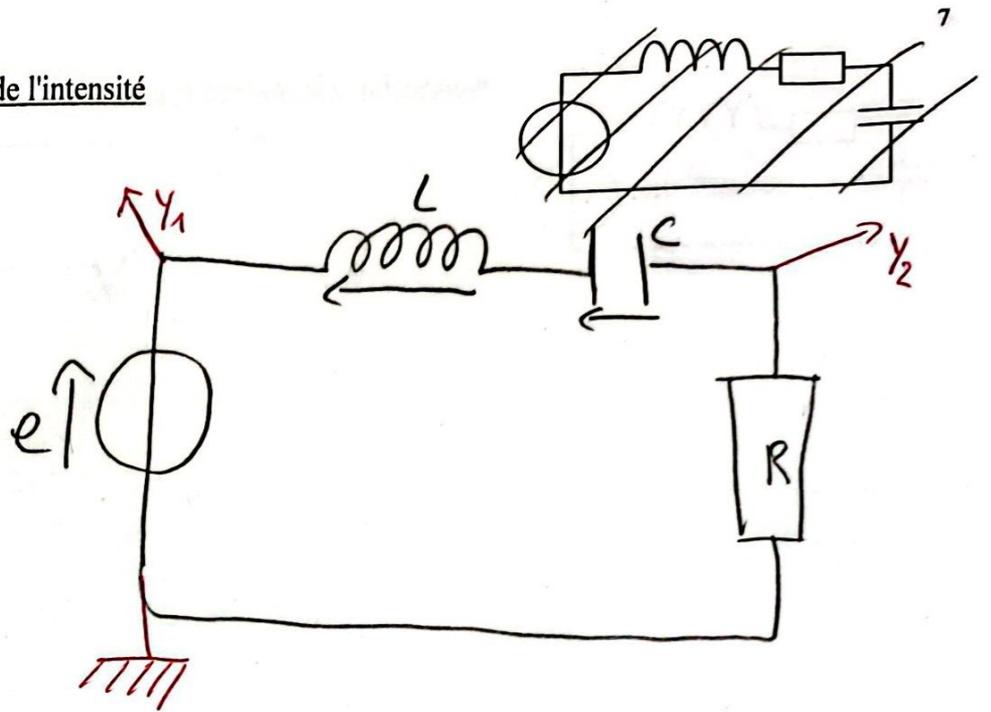
courant é.m.  $\mathcal{E}$ , admittance interne  $\mathcal{C}$

$Y = \frac{1}{Z}$



### III Le circuit RLC série. Etude de l'intensité

#### 1.) Notation complexe



$$e(t) = E_m \cos(\omega t)$$

$$\leadsto \underline{e}(t) = E_m e^{j\omega t}$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi) \leftarrow \text{circuit linéaire.}$$

$$\leadsto \underline{i}(t) = I_m e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$\Rightarrow \underline{i}(t) = \underline{I}_m e^{j\omega t} \quad \text{ou} \quad \underline{I}_m = I_m e^{j\varphi}$$

$$\underline{e} = (\underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C) \underline{i} \quad \text{car les 3 dipôles sont en série}$$

$$\Rightarrow \underline{e} = \left( R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) \underline{i} \quad \text{d'après les équations d'avant (cf pages précédentes)}$$

$$\Rightarrow \underline{i} = \frac{\underline{e}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \frac{1}{j} = -j$$

$$\Rightarrow \underline{i} = \frac{\underline{e}}{R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}}$$

$$\Rightarrow \frac{\underline{i}}{\underline{e}} = \frac{1}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

$$\underline{Den} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad (\text{dénominateur})$$

$$\Rightarrow \frac{\underline{i}}{\underline{e}} = \frac{\underline{I}_m}{\underline{E}_m} = \frac{1}{\underline{Den}}$$

(suite sur la feuille blanche de cours)

## Rq 1: Obtention de l'équa diff.

$$\textcircled{1} \rightarrow \underline{e} = (R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega})i$$

$$\Rightarrow \underline{e} = Ri + j\omega Li + \frac{1}{j\omega} \times \frac{1}{C} i$$

$$\Rightarrow \underline{e} = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt$$

en dérivant,  $\Rightarrow \frac{de}{dt} = R \frac{di}{dt} + L \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{C} i$

$$\Rightarrow \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = \frac{1}{L} \frac{de}{dt}$$

On prend la partie réelle de chaque membre.

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i &= \frac{1}{L} \frac{de}{dt} \\ \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i &= \frac{1}{L} \frac{de}{dt} \end{aligned} \right\} \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

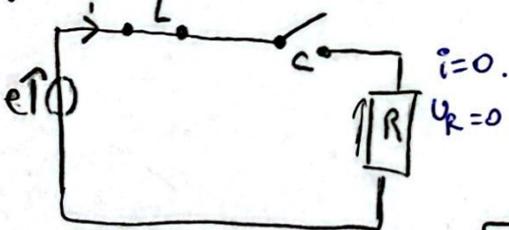
$$\text{Et } 2\lambda = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L} \Rightarrow Q = \frac{L\omega_0}{R}$$

$\Rightarrow$  on peut retrouver la solution libre du régime transitoire (cf SEU).

## Rq 2: Schémas équivalents

Basses fréquences:  $f \rightarrow 0$ ,  $\omega = 2\pi f$ ,  $\omega \rightarrow 0$ . (Régime continu)

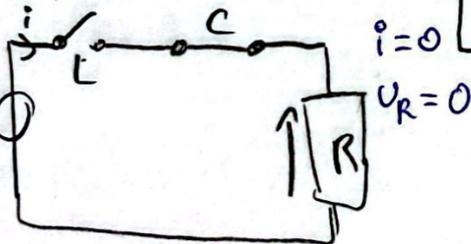
$C \sim$  int. ouvert  
 $L \sim$  fil.



Hautes fréquences:  $f \rightarrow +\infty$ ,  $\omega \rightarrow +\infty$ .

$C \sim$  fil

$L \sim$  int. ouvert.



## 2) Étude de l'amplitude de $I_m$

$$\textcircled{1} \rightarrow \left| \frac{I_m}{E_m} \right| = \frac{|I_m|}{|E_m|} = \frac{I_m}{E_m}$$

$$\textcircled{2} \rightarrow \frac{I_m}{E_m} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}} \textcircled{3} = \frac{1}{|Z_{eq}|}$$

• quand  $\omega \rightarrow 0$ ,  $L\omega \Rightarrow 0$ ,  $\frac{1}{C\omega} \rightarrow +\infty$ .

$$(L\omega - \frac{1}{C\omega})^2 \rightarrow +\infty, \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2} \rightarrow +\infty$$

$$\textcircled{3} \rightarrow \frac{I_m}{E_m} \rightarrow 0.$$

• quand  $\omega \rightarrow +\infty$ ,  $L\omega \rightarrow +\infty$ ,  $\frac{1}{C\omega} \rightarrow 0$ .

$$(L\omega - \frac{1}{C\omega})^2 \rightarrow +\infty, \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2} \rightarrow +\infty$$

$$\textcircled{3} \Rightarrow \frac{I_m}{E_m} \rightarrow 0$$

• 1 point particulier:  $L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0 \Rightarrow L\omega = \frac{1}{C\omega}$   
 $\Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{LC}$ ,  $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  pulsation propre

$$\textcircled{2} \frac{I_m}{E_m}(\omega_0) = \frac{1}{R}$$

Rq:  $\frac{I_m}{E_m} = \frac{1}{\sqrt{f(\omega)}}$  où  $f(\omega) = R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2$

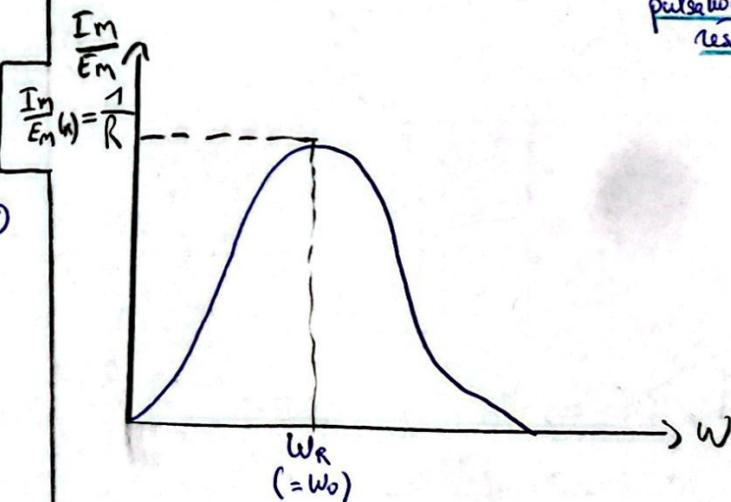
$$f'(\omega) = 2(L + \frac{1}{C\omega^2}) \cdot (L\omega - \frac{1}{C\omega})$$

$$f'(\omega) = 0 \text{ pour } L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0 \Rightarrow \omega = \omega_0$$

Resonance d'intensité:

$I_m(\omega)$  passe par un maximum pour  $\omega_R = \omega_0$

pulsation de résonance



### 3) Etude de la phase :

$$\Rightarrow \underline{I}_m = \frac{E_m}{\underline{Den}}$$

$$\varphi_i = \arg(\underline{I}_m) = \arg\left(\frac{E_m}{\underline{Den}}\right)$$

$$= \arg(E_m) - \arg(\underline{Den})$$

$$\varphi_i = -\arg(\underline{Den}) \quad \text{car } \arg(E_m) = 0.$$

$$\varphi_i = -\varphi_d \quad \text{ou } \varphi_d = \arg(\underline{Den})$$

$$\underline{Den} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

$$\text{Rq: } \underline{Den} = |\underline{Den}| e^{j\varphi_d}$$

$$\underline{Den} = |\underline{Den}| (\cos \varphi_d + j \sin \varphi_d)$$

$$e^{j\varphi_d} = \cos \varphi_d + j \sin \varphi_d$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}(\underline{Den}) = |\underline{Den}| \cos \varphi_d \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(\underline{Den}) = |\underline{Den}| \sin \varphi_d$$

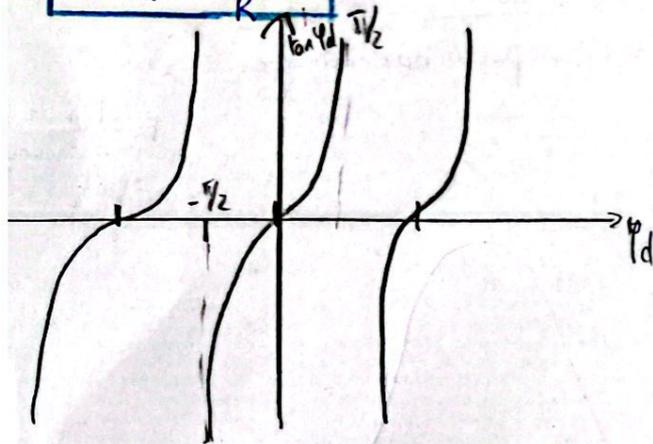
$$\Rightarrow \cos \varphi_d = \frac{\operatorname{Re}(\underline{Den})}{|\underline{Den}|} \quad \text{et} \quad \sin \varphi_d = \frac{\operatorname{Im}(\underline{Den})}{|\underline{Den}|}$$

$$\Rightarrow \tan \varphi_d = \frac{\operatorname{Im}(\underline{Den})}{\operatorname{Re}(\underline{Den})}$$

$$\text{ou } |\underline{Den}| = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

$$\cos \varphi_d = \frac{R}{|\underline{Den}|} \quad \sin \varphi_d = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{|\underline{Den}|}$$

$$\Rightarrow \tan \varphi_d = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$$



$$\text{cos } \varphi_d \geq 0 \Rightarrow \varphi_d \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

• quand  $\omega \rightarrow 0$ ,  $L\omega \rightarrow 0$ ,  $\frac{1}{C\omega} \rightarrow +\infty$   
 $L\omega - \frac{1}{C\omega} \rightarrow -\infty$   $\tan \varphi_d \rightarrow -\infty \Rightarrow \varphi_d \rightarrow -\frac{\pi}{2}$

• quand  $\omega \rightarrow +\infty$ ,  $L\omega \rightarrow +\infty$ ,  $\frac{1}{C\omega} \rightarrow 0$

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} \rightarrow +\infty, \tan \varphi_d \rightarrow +\infty$$

$$\hookrightarrow \varphi_d \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

• a  $\omega = \omega_0$ :  $L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$ ,  $\tan \varphi_d = 0$   
 $\hookrightarrow \varphi_d = 0$ .

$$\varphi_r = -\varphi_d$$

$$\Rightarrow \varphi_r = -\operatorname{Arctan}\left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}\right)$$

