III Le circuit RLC série. Etude de l'intensité

1.) Notation complexe

$e(t) = E_m \cos(\omega t)$

$\rightsquigarrow \underline{e}(t) = E_m e^{j\omega t}$

$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$ (circuit linéaire)

$\rightsquigarrow \underline{i}(t) = I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)}$

$= \underline{I_m} e^{j\omega t}$ où $\underline{I_m} = I_m e^{j\varphi_i}$

$\underline{e} = (\underline{Z_R} + \underline{Z_L} + \underline{Z_C})\underline{i}$ car les 3 dipôles sont en CVR

$$\Rightarrow \boxed{\underline{e} = \left(R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}\right)\underline{i}} \quad ①$$

$$\Rightarrow \underline{i} = \frac{\underline{e}}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}$$

$$\Rightarrow \underline{i} = \frac{\underline{e}}{R + jL\omega - \frac{j}{C\omega}} \Rightarrow \underline{i} = \frac{\underline{e}}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underbrace{\frac{\underline{i}}{\underline{e}}}_{\text{simplificaθ par } \exp(j\omega t)} = \frac{\underline{I_m}}{E_m} = \frac{1}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}} \quad ②$$

$$\underline{D_{en}} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\underline{i}}{\underline{e}} = \frac{\underline{I_m}}{E_m} = \frac{1}{\underline{D_{en}}}$$

Rq : Obtention de l'eq diff

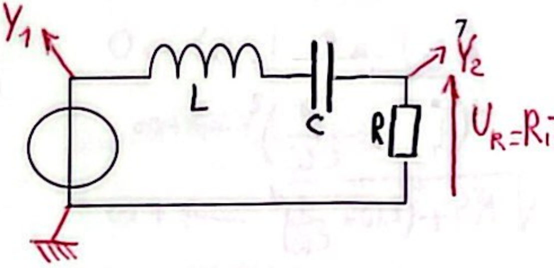
① $\underline{e} = \left(R + jL\omega + \frac{1}{j\omega C}\right)\underline{i}$

$$= R\underline{i} + jL\omega\underline{i} + \frac{\underline{i}}{j\omega C}$$

$$= R\underline{i} + L\frac{d\underline{i}}{dt} + \frac{1}{C}\int \underline{i}\, dt$$

On dérive /t :

$$\frac{d\underline{e}}{dt} = L\frac{d^2\underline{i}}{dt^2} + R\frac{d\underline{i}}{dt} + \frac{1}{C}\underline{i}$$



$$\Rightarrow \frac{d^2\underline{i}}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{d\underline{i}}{dt} + \frac{1}{LC}\underline{i} = \frac{1}{L}\frac{d\underline{e}}{dt}$$

On prend la partie réelle de chaque membre

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = \frac{1}{L}\frac{de}{dt}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \text{ et } 2\lambda = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L} \Rightarrow Q = \frac{L\omega_0}{R}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = \frac{1}{L}\frac{de}{dt}$$

On peut retrouver la soluθ libre du régime transitoire (cf SE4)

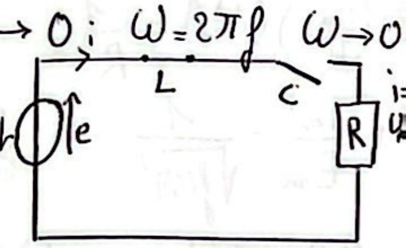
Rq 2 : Schémas équivalents

Basses fréquences $f \to 0$; $\omega = 2\pi f$ $\omega \to 0$

(régime continu)

$C \simeq$ interrupteur ouvert

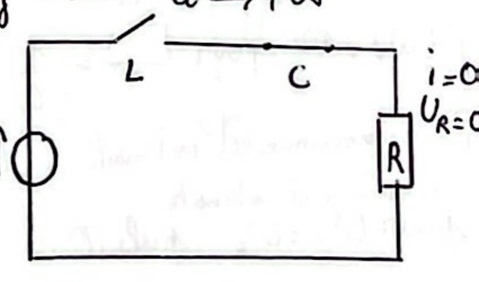
$L \simeq$ fil



Hautes fréquences $f \to +\infty$ $\omega \to +\infty$

$C \simeq$ fil

$L \simeq$ int. ouvert



2) Etude de l'amplitude I_m

$$② \left|\frac{\underline{I_m}}{E_m}\right| = \frac{|\underline{I_m}|}{|E_m|} = \frac{I_m}{E_m}$$

$$② \Rightarrow \frac{I_m}{E_m} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} = \frac{1}{|\underline{D_{en}}|}$$

• $\underline{\omega \to 0}$ $L\omega \to 0$ $\quad \frac{1}{C\omega} \to +\infty$

$\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 \to +\infty$

$\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \to +\infty$

$\frac{I_m}{E_m} \to 0$

• $\underline{\omega \to +\infty}$ $L\omega \to +\infty$ $\quad \frac{1}{C\omega} \to 0$

$\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 \to +\infty$

$\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \to +\infty$

$\frac{I_m}{E_m} \to 0$

<u>1 point particulier</u> $L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$

$\Rightarrow L\omega = \frac{1}{C\omega}$

$\Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ pulsaθ propre

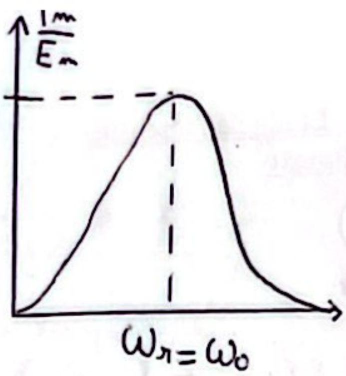
② $\left(\frac{I_m}{E_m}\right)(\omega_0) = \frac{1}{R}$

Rq : $\frac{I_m}{E_m} = \frac{1}{\sqrt{f(\omega)}}$ où $f(\omega) = R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2$

$f'(\omega) = 2\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\left(L\omega + \frac{1}{C\omega^2}\right)$

$f'(\omega) = 0$ pour $L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0 \Rightarrow \omega = \omega_0$

Résonnance d'intensité $I_m(\omega)$ passe par 1 maximum d'intensité pour $\omega_r = \omega_0$ pulsaθ de résonnance



$\frac{I_m}{E_m}(\omega_r) = \frac{1}{R}$

$\varphi_i = 0$ i et e sont en phase

3) Etude de la phase $\underline{I_m} = \frac{\underline{E_m}}{\underline{D_{en}}}$

$\varphi_i = \arg(\underline{I_m}) = \arg\left(\frac{E_m}{\underline{D_{en}}}\right)$

$= \arg(E_m) - \arg(\underline{D_{en}})$

$\varphi_i = -\varphi_D$ où $\varphi_D = \arg(\underline{D_{en}})$

$\underline{D_{en}} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$

Rq : $\underline{D_{en}} = |\underline{D_{en}}| e^{j\varphi_D}$

$\underline{D_{en}} = |\underline{D_{en}}|(\cos\varphi_D + j\sin\varphi_D)$

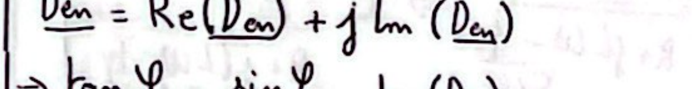
$\underline{D_{en}} = \mathrm{Re}(\underline{D_{en}}) + j\,\mathrm{Im}(\underline{D_{en}})$

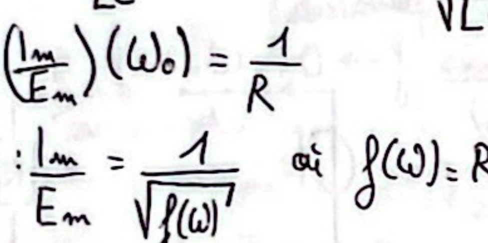
$\Rightarrow \tan\varphi_D = \frac{\sin\varphi_D}{\cos\varphi_D} = \frac{\mathrm{Im}(\underline{D_{en}})}{\mathrm{Re}(\underline{D_{en}})}$

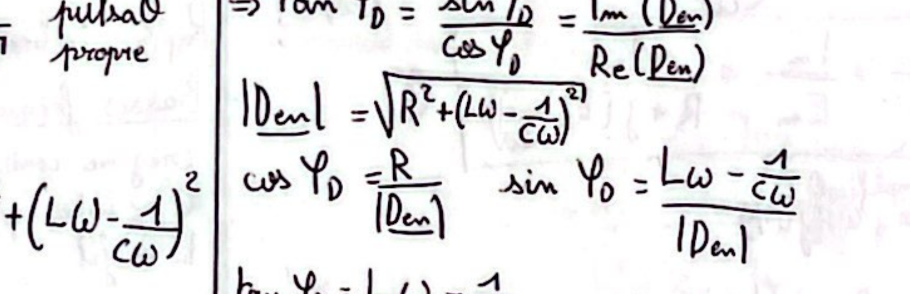
$|\underline{D_{en}}| = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$

$\cos\varphi_D = \frac{R}{|\underline{D_{en}}|}$ $\quad \sin\varphi_D = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{|\underline{D_{en}}|}$

$\tan\varphi_D = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$







$\left(\xi = \frac{1}{2Q}\right)$ autre forme canonique

Figure 10.17 – Rapports de l'amplitude de u_R à sa valeur maximale (R variable).

Quand $Q \nearrow$, $\Delta\omega \searrow$ $R \searrow$

pic de résonnance + étroit

⇔ résonnance "aigüe" $\Rightarrow$ rotaθ de phase + rapide (passage de $\frac{\pi}{4}$ à $-\frac{\pi}{4}$ sur un intervalle plus petit)

Cours - SE5 - Phys

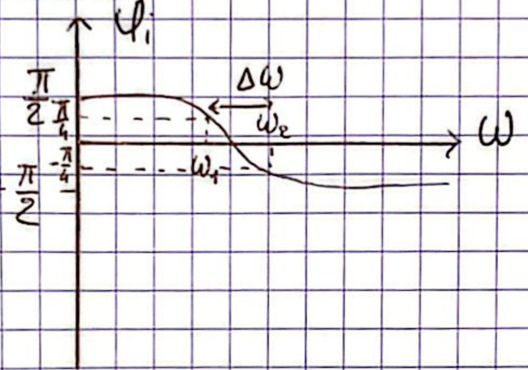
4) Bande passante (à -3dB)

Intervalle de pulsation pour lequel $I_m \geq \frac{I_{mr}}{\sqrt{2}}$

I_{mr} amplitude de l'intensité à la résonnance

Limite de la bande passante

$$I_m = \frac{I_{mr}}{\sqrt{2}}$$



$$\frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} = \frac{E_m}{R\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 = 2R^2$$

$$\Rightarrow \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 = R^2$$

$$\Rightarrow L\omega - \frac{1}{C\omega} = \pm R$$

$$\Rightarrow LC\omega^2 \pm RC\omega - 1 = 0$$

$$\Delta = (\pm RC)^2 + 4LC^2 = (\pm R^2 + 4L)(C) = (R^2C + 4L)(C) > 0$$

$$\omega = \frac{\pm RC \pm \sqrt{\Delta}}{2LC}$$

4 racines réelles : $\omega = 2\pi f > 0$

$$\omega_2 = \frac{+RC + \sqrt{\Delta}}{2LC}$$

$$\omega_1 = \frac{-RC + \sqrt{\Delta}}{2LC}$$

Largeur de la bande passante $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L}$

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{R}{L\omega_0} = \frac{1}{Q}$$

cf (3) $\tan \varphi_D = \dfrac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} = \dfrac{\pm R}{R} = \pm 1$

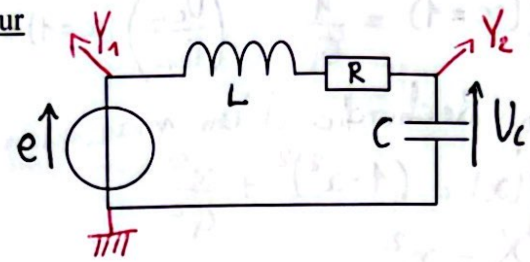
$\Rightarrow \varphi_D = \pm \dfrac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \varphi_i = -\varphi_D = \pm \dfrac{\pi}{4}$

Doc 10.17 Filtre passe bande : Le courant dans le circuit tend vers 0 quand $\omega \to +\infty$ Son amplitude I_m vérifie $I_m \geqslant \dfrac{I_{m\,n}}{\sqrt{2}}$ sur la bande passante

IV Le circuit RLC série. Etude de la tension aux bornes du condensateur

1.) Notation complexe



$e(t) = E_m \cos(\omega t)$ ref des phases

$\rightsquigarrow \underline{e}(t) = E_m e^{j\omega t}$ où $E_m = \underline{E_m}$

$U_c(t) = U_{cm} \cos(\omega t + \varphi_{uc})$

$\rightsquigarrow \underline{U_c}(t) = U_{cm}\, e^{j(\omega t + \varphi_{uc})}$

$\Rightarrow \underline{U_c}(t) = \underline{U_{cm}}\, e^{j\omega t}$ où $\underline{U_{cm}} = U_{cm} e^{j\varphi_{uc}}$

$\underline{e} = \underline{Z_{eq}}\, \underline{i}$ où $\underline{Z_{eq}} = jL\omega + \frac{1}{jC\omega} + R$

$\underline{u_c} = \underline{Z_c}\, \underline{i}$ où $\underline{Z_c} = \frac{1}{jC\omega}$

$$\frac{\underline{u_c}}{\underline{e}} = \frac{\underline{U_{cm}}}{E_m} \frac{e^{j\omega t}}{e^{j\omega t}} = \frac{\underline{Z_c}}{\underline{Z_{eq}}}$$

Pont diviseur de tension

$$\frac{\underline{u_c}}{\underline{e}} = \frac{\underline{U_{cm}}}{E_m} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}$$

$$\Rightarrow \frac{\underline{U_{cm}}}{E_m} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

Rq 1 : equa diff

$\Rightarrow U_c\left(R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}\right) = \frac{\underline{e}}{jC\omega}$

$\Rightarrow R\underline{u_c} + L\frac{d\underline{U_c}}{dt} + \frac{1}{C}\int \underline{u_c}(t)\,dt = \frac{1}{C}\int \underline{e}(t)\,dt$

$\Rightarrow L\frac{d^2\underline{u_c}}{dt^2} + R\frac{d\underline{U_c}}{dt} + \frac{1}{C}\underline{U_c} = \frac{1}{C}\underline{e}$

$\times \frac{1}{L}$ puis Re (equation)

$\Rightarrow \frac{d^2 U_c}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dU_c}{dt} + \frac{1}{LC}u = \frac{e}{LC}$

2^e forme canonique $\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

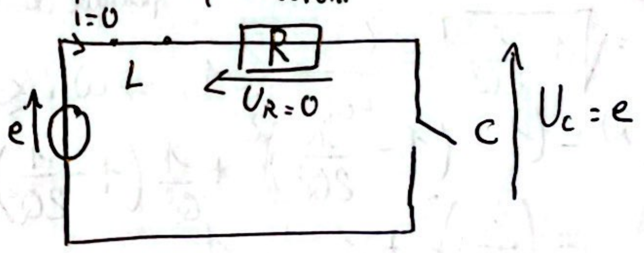
et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L} \Rightarrow Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$

$$\frac{\underline{U_{cm}}}{E_m} = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + jRC\omega_0 \times \frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

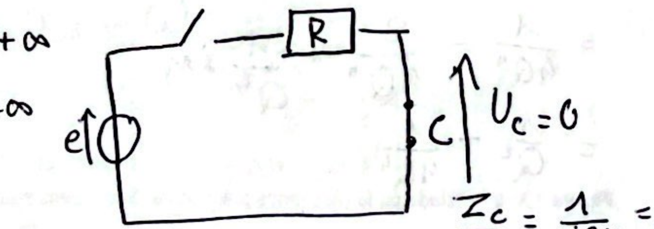
$x = \frac{\omega}{\omega_0}$ $\boxed{\frac{\underline{U_{cm}}}{E_m} = \frac{1}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}}$ (1)

Rq2 : Schéma équivalent

BF
$f \to 0$
$\omega \to 0$



HF
$f \to +\infty$
$\omega \to +\infty$



$\underline{Z_c} = \frac{1}{jC\omega} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}}$

2) étude de l'amplitude

$$\frac{U_{cm}}{E_m} = \left|\frac{\underline{U_{cm}}}{E_m}\right| = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$$ d'après (1)

$\frac{U_{cm}}{E_m} = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$ où $f(x) = (1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}$

BF $\omega \to 0$ $x \to 0$ $f(x) \to 1$ $\frac{U_{cm}}{E_m} \to 1$

HF $\omega \to +\infty$ $x \to +\infty$ $f(x) \to +\infty$ $\frac{U_{cm}}{E_m} \to 0$

10 Point particulier : $\omega = \omega_0$ $\quad x = 1$

$$f(x=1) = \frac{1}{Q^2} \qquad \left(\frac{U_{cm}}{E_m}\right)(x=1) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{Q^2}}}$$

Rq : Recherche d'un maximum

$$f(x) = (1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}$$

$$X = x^2$$

$$f(X) = (1-X)^2 + \frac{X}{Q^2}$$

$$f'(X) = -2(1-X) + \frac{1}{Q^2}$$

$$f'(X) = 0 \Rightarrow 2(1-X) = \frac{1}{Q^2}$$

$$\Rightarrow 1-X = \frac{1}{2Q^2} \Rightarrow X = 1 - \frac{1}{2Q^2}$$

Or $X = x^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2} \geqslant 0$

$$\Rightarrow 1 \geqslant \frac{1}{2Q^2} \Rightarrow Q^2 \geqslant \frac{1}{2} \Rightarrow Q \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$$

pourque x_r existe

$$x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} = \frac{\omega_r}{\omega_0} \leqslant 1 \Rightarrow \omega_r \leqslant \omega_0$$

$$f(x_r) = \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)\right)^2 + \frac{1}{Q^2}\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2Q^2}\right)^2 + \frac{1}{Q^2} - \frac{1}{2Q^4}$$

$$= \frac{1}{4Q^4} - \frac{1}{2Q^4} + \frac{1}{Q^2}$$

$$= \frac{1}{4Q^4} - \frac{2}{4Q^4} + \frac{1}{Q^2}$$

$$= \frac{1}{Q^2} - \frac{1}{4Q^4}$$

$$f(x_r) = \frac{4Q^2 - 1}{4Q^4}$$

$$\sqrt{f(x_r)} = \sqrt{\frac{4Q^2-1}{4Q^4}}$$

$$\left(\frac{U_{cm}}{E_m}\right)(x_r) = \frac{1}{\sqrt{f(x_r)}} = \frac{2Q^2}{\sqrt{4Q^2-1}} = \left(\frac{U_{cm}}{E_m}\right)_r$$

pour $x_r = \frac{\omega_r}{\omega_0} = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ $\quad \left(Q \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Rq 1 : Pour Q grand tq : $4Q^2 \gg 1$

$$4Q^2 - 1 \simeq 4Q^2 \Rightarrow \left(\frac{U_{cm}}{E_m}\right)(x_r) \simeq \frac{2Q^2}{\sqrt{4Q^2}} \simeq Q$$

et $x_r = \frac{\omega_r}{\omega_0} = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \simeq 1 \Rightarrow \omega_r \simeq \omega_0$

pour Q suffisament grand $\left(1 \gg \frac{1}{2Q^2}\right)$

En pratique, on prend $Q \geqslant 5$

Rq 2 : Pour $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad x_r = \frac{\omega_r}{\omega_0} = 0 \Rightarrow \omega_r \simeq 0$

3) Etude de la phase

① $\frac{\underline{U_{cm}}}{\underline{E_m}} = \frac{1}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} = \frac{1}{\underline{D_{en}}} \Rightarrow \underline{U_{cm}} = \frac{\underline{E_m}}{\underline{D_{en}}}$

$$\varphi_{uc} = \text{Arg}(\underline{U_{cm}}) = \text{Arg}(\underline{E_m}) - \text{Arg}(\underline{D_{en}}) = 0 - \varphi_D$$

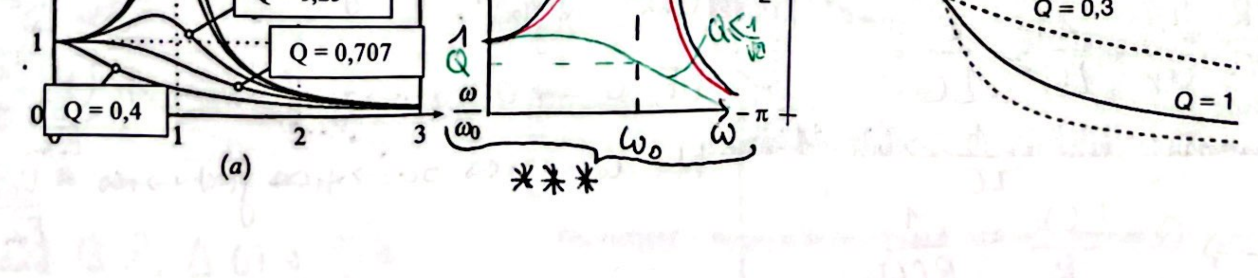
où $\varphi_D = \text{Arg}(\underline{D_{en}})$

$$|\underline{D_{en}}| = \sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}$$

$$\cos\varphi_D = \frac{1-x^2}{|\underline{D_{en}}|} \qquad \sin\varphi_D = \frac{x/Q}{|\underline{D_{en}}|}$$

$$\tan\varphi_D = \frac{x}{Q(1-x^2)}$$

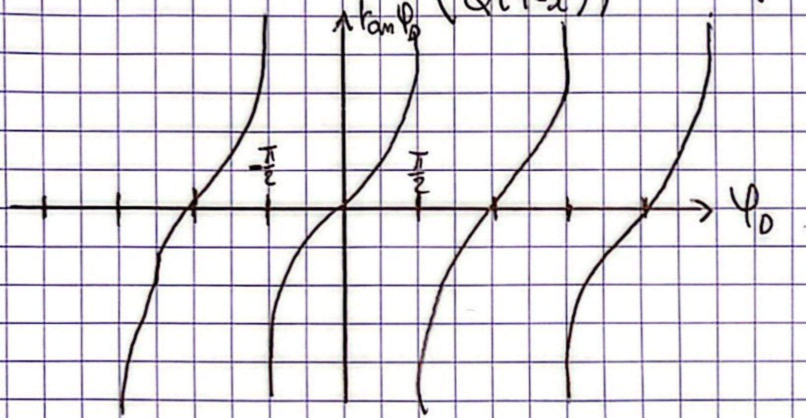
Figure 10.19 – Étude de la résonance aux bornes du condensateur



Cours SE5 - Phys (3)

↑ 10

- $\varphi_{uc} = -\arctan\left(\frac{x}{Q(1-x^2)}\right)$ en vérifiant le signe du cosinus



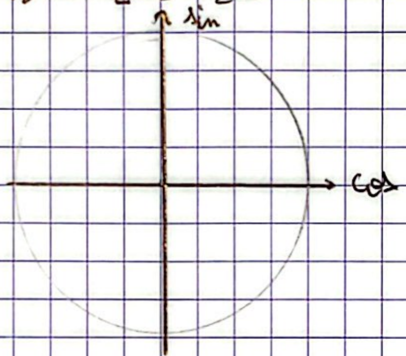
BF $\omega \to 0$ $x \to 0$ $\omega < \omega_0$ $x < 1$

- $\cos \varphi_D \geq 0$ $\varphi_D \in [-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}]$

$\tan \varphi_D \to 0$

$\varphi_D \to 0\ [\pi]$

$\varphi_D \to 0$



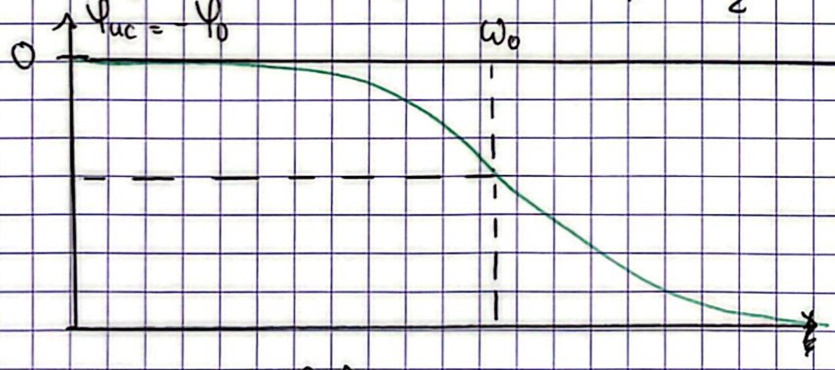
HF $\omega \to +\infty$ $x \to +\infty$ $\omega > \omega_0$ $x > 1$

$\cos \varphi_D \leq 0$ $\varphi_D \in [\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}]$

$\tan \varphi_D \to 0$ $\varphi_D \to 0\ [\pi]$ $\varphi_D \to \pi$

- Point particulier $\omega = \omega_0$ $x = 1$

$\cos \varphi_D = 0$ $\sin \varphi_D = 1$ $\varphi_D = \frac{\pi}{2}$



poly $\varphi = \varphi_{uc}$

4) comportement du filtre

- $U_c = U_{cm} \cos(\omega t + \varphi_{uc})$

$\varphi_{uc} \leq 0$ $\forall \omega \Rightarrow U_c$ est en retard / $e(t)$

$\underline{BF}$: $\omega \to 0$ $\left.\begin{array}{l}\varphi_{uc} \to 0 \\ \dfrac{U_{cm}}{E_m} \to 1\end{array}\right\} \Rightarrow U_c(t) \simeq e(t)$

$\underline{HF}$: $\omega \to +\infty$ $\varphi_{uc} \to -\pi$

$\dfrac{U_{cm}}{E_m} \to 0$ $\Rightarrow U_{cm} \ll E_m$
$U_c(t) \simeq 0$

$u_c(t)$ et $e(t)$ sont en opposiO de phase.

Filtre passe-bas : À BF, le signal de sortie $u_c(t)$ est égal au signal d'entrée : "le signal passe"

À HF $U_c(t) \simeq 0$ "le signal ne passe pas"

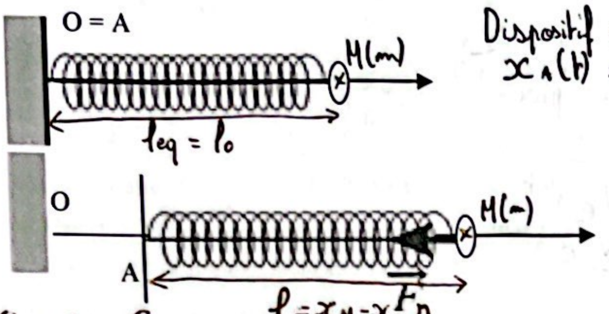
+ Amplification du signal autour de ω_r

$\Rightarrow$ Filtre passe bas avec résonnance pour $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$

V L'oscillateur harmonique amorti ✱✱✱✱✱

1) Equation du mouvement

https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Meca/Oscillateurs/ressort_rsf.php



Dispositif placé entre O et A (syst. Bielle manivelle)
$x_A(t) = A\cos(\omega t)$

Syst {anneau M(m)}

Ref terrestre galiléen

forces : $\vec{P}, \vec{R_N}, \vec{F_r} = -k(l-l_0)\vec{e_x}$

$\vec{F_f} = -\alpha \vec{v} \quad (\alpha > 0)$

LFD $\quad m\vec{a}(M) = \vec{P} + \vec{R_N} + \vec{F_r} + \vec{F_f}$

$\vec{OM} = x_M \vec{e_x}$

$\vec{v} = \dot{x}_M \cdot \vec{e_x}$

$\vec{a} = \ddot{x}_M \vec{e_x}$

$\Rightarrow m\ddot{x}_M \vec{e_x} = \vec{P} + \vec{R_N} + \vec{F_r} + \vec{F_f}$

En proj sur (Ox) :

$m\ddot{x}_M = -k[(x_M - x_A) - l_0] - \alpha \dot{x}_M$

$\Rightarrow \ddot{x}_M + \frac{k}{m}(x_M - l_0) + \frac{\alpha}{m}\dot{x}_M = \frac{k}{m}x_A$

Chgmt de variable : $x_1 = x_M - l_0$
$\dot{x}_1 = \dot{x}_M$
$\ddot{x}_1 = \ddot{x}_M$

$\Rightarrow \ddot{x}_1 + \frac{\alpha}{m}\dot{x}_1 + \frac{k}{m}x_1 = \frac{k}{m}x_A$

forme canonique

$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\alpha}{m} \Rightarrow Q = \frac{m\omega_0}{\alpha}$ facteur de qualité (sans dim)

$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ pulsaO propre ($rad.s^{-1}$)

$\ddot{x}_1 + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = \omega_0^2 x_A$

2) Réponse en élongation

a) notaO complexe

On ne s'intéresse qu'à la soluO forcée du m̂ type que second membre (étude de la soluO libre, correspondant au régime transitoire (cf SE4))

$x_A(t) = A\cos(\omega t) \rightsquigarrow \underline{x_A}(t) = Ae^{j\omega t}$

$x_1(t) = X\cos(\omega t + \varphi)$

$\rightsquigarrow \underline{x_1}(t) = Xe^{j(\omega t + \varphi)}$

$\underline{\ddot{x}_1} + \frac{\omega_0}{Q}\underline{\dot{x}_1} + \omega_0^2 \underline{x_1} = \omega_0^2 \underline{x_A}$

$\Rightarrow (j\omega)^2 \underline{x_1} + \frac{\omega_0}{Q} j\omega \underline{x_1} + \omega_0^2 \underline{x_1} = \omega_0^2 \underline{x_A}$

$\Rightarrow \underline{x_1} = \dfrac{\omega_0^2 \underline{x_A}}{(j\omega)^2 + \frac{\omega_0}{Q} j\omega + \omega_0^2}$

On simplifie par $e^{j\omega t}$

$\Rightarrow \underline{X} = \dfrac{\omega_0^2 A}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}}$ où $\underline{X} = e^{j\varphi}$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad Q = \frac{m\omega_0}{\alpha}$

$\underline{X} = \dfrac{A}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{\omega_0 Q}}$

$\dfrac{\underline{X}}{A} = \dfrac{1}{1 - u^2 + j\frac{u}{Q}}$ $\quad u = \frac{\omega}{\omega_0}$ pulsaO réduite (sans dim)

m̂ foncO que U_c aux bornes de C pour le RLC série

12 b) Étude de l'amplitude

$$\frac{X}{A} = \left|\frac{\underline{X}}{A}\right| = \frac{1}{\sqrt{(1-u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}}}$$

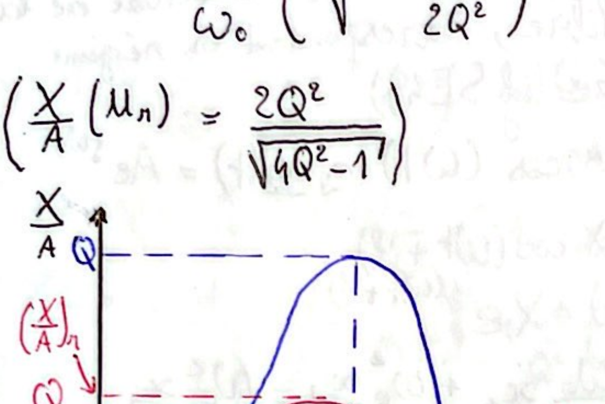
BF $\omega \to 0$ $\quad u \to 0$ $\quad \frac{X}{A} \to 1$

HF $\omega \to +\infty$ $\quad u \to +\infty$ $\quad \frac{X}{A} \to 0$

Point particulier : $\omega = \omega_0$ $\quad u = 1$ $\quad \frac{X}{A} = Q$

Rq : Pour $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$ résonnance en $u_r = \frac{\omega_r}{\omega_0} \left(= \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \right) < 1$

$$\left(\frac{X}{A}(u_r) = \frac{2Q^2}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \right)$$



c) étude de la phase φ

$\varphi = \mathrm{Arg}(\underline{X}) = \arg(A) - \arg(\underline{D_{en}})$ où

$\underline{D_{en}} = 1 - u^2 + j\frac{u}{Q}$ $\quad \Big| \; \varphi = -\varphi_D$ $\quad \varphi_D = \mathrm{Arg}(\underline{D_{en}})$

$\cos\varphi_D = \frac{1-u^2}{|\underline{D_{en}}|}$ $\quad \sin\varphi_D = \frac{\frac{u}{Q}}{|\underline{D_{en}}|}$

$\tan\varphi_D = \frac{u}{Q(1-u^2)}$

$\varphi = -\arctan\left[\frac{u}{Q(1-u^2)}\right]$ en vérifiant le signe de $\cos\varphi_D$

$\omega \to 0$ $\quad u \to 0$ $\quad \varphi \to 0$
$\omega \to +\infty$ $\quad u \to +\infty$ $\quad \varphi \to -\pi$
$\omega = \omega_0$ $\quad u = 1$ $\quad \varphi = -\frac{\pi}{2}$

3) étude de la vitesse

a) expression : vitesse

$v = \dot{x}_1 = \dot{x}_M$

$\leadsto \underline{v} = \dot{\underline{x}}_1 = j\omega \underline{x}_1$

On simplifie par $e^{j\omega t}$

$\Rightarrow \underline{V} = j\omega \underline{X}$

où $\Big| \; \underline{v} = \underline{V} e^{j\omega t}$, $\quad \underline{x}_1 = \underline{X} e^{j\omega t}$

$$\underline{V} = \frac{j\omega A}{1 - u^2 + j\frac{u}{Q}} = \frac{j\omega \times \frac{\omega_0}{\omega_0} \times A}{1 - u^2 + j\frac{u}{Q}} = \frac{j u \omega_0 A}{1 + u^2 + j\frac{u}{Q}}$$

On divise par ju

$$\frac{\underline{V}}{A} = \frac{\omega_0}{\frac{1}{ju} + \frac{j^2 u^2}{ju} + \frac{ju}{juQ}}$$

$\times \frac{Q}{Q}$

$$= \frac{\omega_0 Q}{1 + jQ\left(u - \frac{1}{u}\right)}$$

b) étude de V

$$\frac{V}{A} = \left|\frac{\underline{V}}{A}\right| = \frac{\omega_0 Q}{\sqrt{1 + Q^2\left(u - \frac{1}{u}\right)^2}}$$

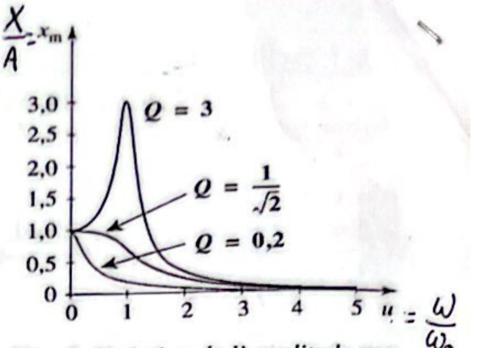
BF $\omega \to 0$ $\quad u \to 0$
$\frac{V}{A} \to 0$

HF $\omega \to +\infty$ $\quad u \to +\infty$
$\frac{V}{A} \to 0$

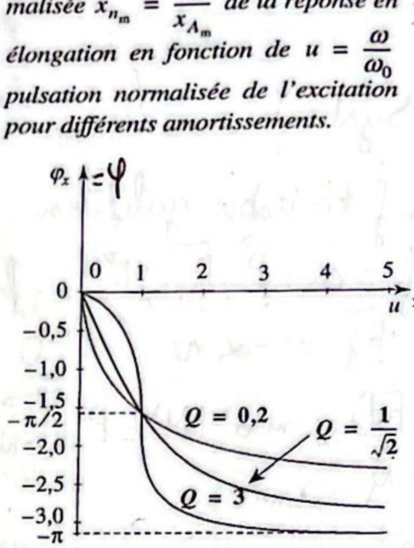
point particulier $\omega = \omega_0$
$u = 1$ $\quad \frac{V}{A} = \omega_0 Q$

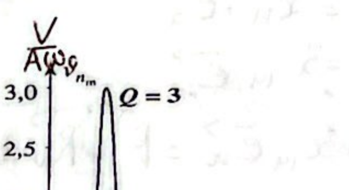
Rq : $f(u) = 1 + Q^2\left(u - \frac{1}{u}\right)^2$

où $\frac{V}{A} = \frac{\omega_0 Q}{\sqrt{f(u)}}$

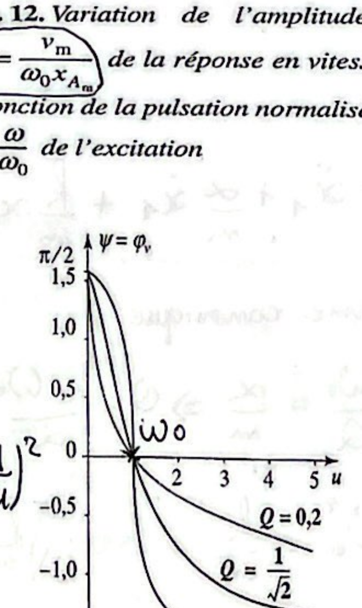


Doc. 8. *Variation de l'amplitude normalisée $x_{n_m} = \frac{x_m}{x_{A_m}}$ de la réponse en élongation en fonction de $u = \frac{\omega}{\omega_0}$ pulsation normalisée de l'excitation pour différents amortissements.*





Doc. 12. *Variation de l'amplitude : $v_{n_m} = \frac{v_m}{\omega_0 x_{A_m}}$ de la réponse en vitesse en fonction de la pulsation normalisée $u = \frac{\omega}{\omega_0}$ de l'excitation*



Cours SE5 - Phys

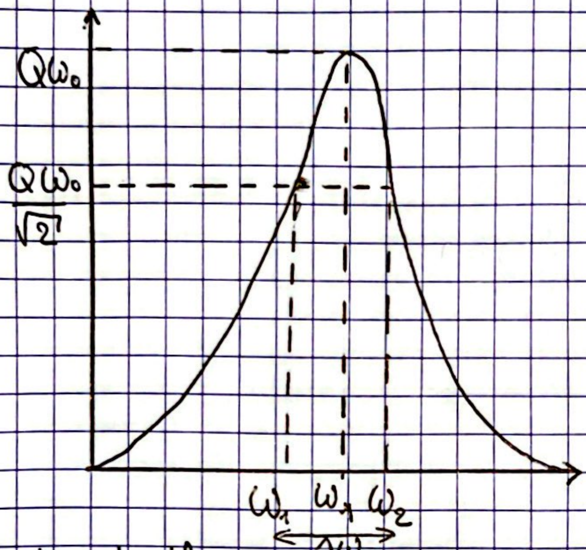
p12

$f'(u) = Q^2 \times 2\left(u - \frac{1}{u}\right)\left(1 + \frac{1}{u^2}\right)$

$f'(u) = 0$ pour $u = 1$

Donc la résonnance en vitesse est $u_r = 1$ $\omega_r = \omega_0$

$\left(\frac{V}{A}\right)_r = \left(\frac{V}{A}\right)(\omega_r) = \omega_0 Q$



~~$f'(u) = 0$ pour $u = 1$~~

$\Delta\omega$ bande passante

c) Étude de $\varphi_v = \arg(\underline{V})$

$\underline{V} = \frac{\omega_0 Q A}{1 + jQ\left(u - \frac{1}{u}\right)}$

$\varphi_v = \varphi_{num} - \varphi_{den} = -\varphi_{Den}$

où $\varphi_{Den} = \arg(\underline{Den})$ et $\underline{Den} = 1 + jQ\left(u - \frac{1}{u}\right)$

$|\underline{Den}| = \sqrt{1 + Q^2\left(u - \frac{1}{u}\right)^2}$

$\cos\varphi_D = \frac{1}{|\underline{Den}|}$ donc $\varphi_D \in \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$

$\sin\varphi_D = \frac{Q\left(u - \frac{1}{u}\right)}{|\underline{Den}|}$

$\tan\varphi_D = Q\left(u - \frac{1}{u}\right)$

$\omega \to 0$	$u \to 0$	$\tan\varphi_D \to -\infty$	$\varphi_D \to -\frac{\pi}{2}$	$\varphi_v \to \frac{\pi}{2}$
$\omega \to +\infty$	$u \to +\infty$	$\tan\varphi_D \to +\infty$	$\varphi_D \to \frac{\pi}{2}$	$\varphi_v \to -\frac{\pi}{2}$
$\omega = \omega_0$	$u = 1$	$\tan\varphi_D = 0$	$\varphi_D = 0$	$\varphi_v = 0$

c) étude de la bande passante

On veut $V \geq \frac{V_r}{\sqrt{2}}$ sur la bande passante

$V = \frac{V_r}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{V}{A} = \frac{V_r}{A} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow \frac{\omega_0 Q}{\sqrt{1+Q^2\left(u-\frac{1}{u}\right)^2}} = \frac{\omega_0 Q}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow 1 + Q^2\left(u - \frac{1}{u}\right)^2 = 2$$

$$\Rightarrow Q^2\left(u-\frac{1}{u}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{Q\left(u - \frac{1}{u}\right) = \pm 1} \quad (3)$$

$$\Rightarrow u - \frac{1}{u} = \pm \frac{1}{Q}$$

$$\Rightarrow u^2 - 1 = \pm \frac{u}{Q}$$

$$\Rightarrow u^2 \pm \frac{u}{Q} - 1 = 0$$

$$\Delta = \left(\pm\frac{1}{Q}\right)^2 - 4\times(-1) = \frac{1}{Q^2} + 4 > 0 \qquad \left(\frac{1}{Q^2}+4 > \frac{1}{Q^2} \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{Q^2}+4} > \frac{1}{Q}\right)$$

$u = \dfrac{\pm\frac{1}{Q} - \sqrt{\Delta}}{2}$ → exclu car $u > 0$

$$u = \frac{\pm\frac{1}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2}+4}}{2}$$

$$u_1 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2}+4}\right)$$

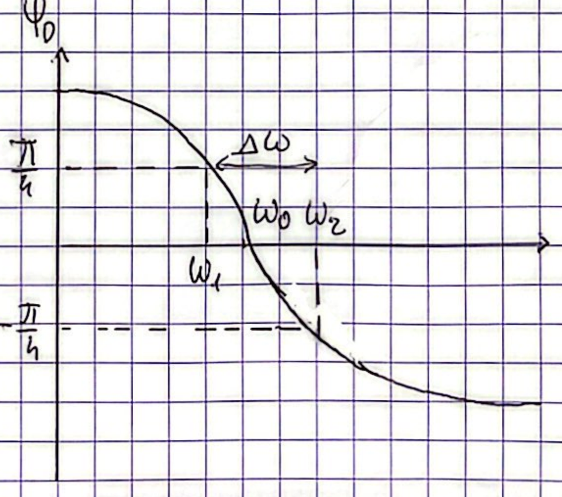
$$u_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2}+4}\right)$$

$$\Delta u = u_2 - u_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{Q}+\frac{1}{Q}\right) = \frac{1}{Q}$$

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q} \Rightarrow \Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$$

$$\tan\varphi_0 = Q\left(u - \frac{1}{u}\right)$$

(3) $\Rightarrow \tan\varphi_0 = \pm 1 \Rightarrow \varphi_0 = \pm\frac{\pi}{4}$



$Q \nearrow$ $\Delta\omega \searrow$ pic de résonnance plus étroit → "résonnance plus aigüe"

Rotation de phase "plus rapide"