PROGRAMMES 9 et 10.

PROGRAMME 9 : du 4/12 au 8/12

Reprise du calcul intégral

Équations différentielles linéaires du premier ordre (EDL_1)

Soit (E) : $\forall x \in I, a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x)$ où a, b, c sont des fonctions continues définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles ou complexes. On suppose que la fonction a ne s'annule pas sur l'intervalle I.

- ★ Équation homogène associée.
- ★ L'ensemble des solutions de (E) n'est pas vide.
  Forme des solutions : somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.
- ★ Cas particulier où la fonction a est constante.
- ★ Résolution de l'équation homogène.
- ★ Méthode de la variation de la constante.
- ★ Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.

EDL_2 à coefficients constants

Soit (E) : $ay'' + by' + cy = f(x)$ où a, b, c réels ou complexes $(a \neq 0)$ et $f : I \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- ★ Équation homogène associée.
- ★ Forme des solutions, si l'ensemble des solutions de (E) n'est pas vide : somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.
- ★ Résolution de l'équation homogène. Si a et b sont réels, description des solutions réelles.
- ★ Les étudiants doivent savoir déterminer une solution particulière dans le cas d'un second membre de la forme : polynôme, $x \mapsto \lambda e^{\omega x}$ avec $(\lambda, \omega) \in \mathbb{C}^2$, $x \mapsto \lambda \cos(\omega x)$ et $x \mapsto \lambda \sin(\omega x)$ avec $(\lambda, \omega) \in \mathbb{R}^2$ (méthode par passage aux complexes).
- ★ Principe de superposition.
- ★ Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.
- ★ En TD, exemples de résolution par changement de fonction inconnue (donner la fonction, on se ramène à de l'ordre 1 ou de l'ordre 2 à coefficients constants).

Question supplémentaire

On demandera à chaque étudiant, en plus de la preuve et de l'énoncé, 3 primitives usuelles issues du tableau des primitives usuelles (il faut savoir retrouver $\int \tan(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$).

Un énoncé au choix à demander

- ❒ Définition d'une primitive
- ❒ Théorème fondamental de l'analyse
- ❒ Résultats d'intégration sur les fonctions paires / impaires, périodiques.
- ❒ Théorème donnant l'ensemble des solutions d'une EDL_1 sans second membre.
- ❒ Solutions dans le cas réel de $ay''+by'+cy=0$ (où a, b, c constantes réelles, $a \neq 0$).
- ❒ Problème de Cauchy pour un ordre 1 ou 2.

Démonstrations

Cette semaine, la preuve consiste en un calcul fait en cours.

- ❒ Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+x+1}$.
- ❒ Calculer les intégrales $I = \displaystyle\int_0^\pi e^{2t}\cos t\,\mathrm{d}t$ et $J = \displaystyle\int_0^\pi e^{2t}\sin t\,\mathrm{d}t$ (par double IPP ou passage en complexes).
- ❒ Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y''+y'+y=\cos^2(x)$.

PROGRAMME 10 : du 11/12 au 15/12

Reprise des *EDL*

Nombres réels

- ★ La relation d'ordre $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$: majorant, minorant, maximum, minimum.
- ★ Borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie de $\mathbb{R}$. Propriété de la borne sup.
- ★ Partie entière. Notation $\lfloor x \rfloor$.
- ★ Approximations décimales : valeurs décimales approchées à la précision 10^{-n} par défaut et par excès.
- ★ Une partie X de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si, pour tous a et b dans X, on a $[a, b] \subset X$.

Remarque aux colleurs : Ne pas donner d'exercice sur la notion de borne sup/inf.

Notions d'arithmétique

- ★ Multiples et diviseurs d'un entier. Division euclidienne dans $\mathbb{N}$.
- ★ Définition d'un nombre premier. Tout entier $n \geq 2$ admet au moins un diviseur premier. L'ensemble des nombres premiers est infini. Existence et unicité de la décomposition d'un entier supérieur ou égal à 2 en produit de facteurs premiers.
- ★ PGCD de deux entiers naturels dont l'un au moins est non nul. PPCM de deux entiers naturels non nuls. Calcul du PGCD et PPCM en utilisant la décomposition en produit de nombres premiers. Algorithme d'Euclide.

Remarque aux colleurs : Les exercices sur l'arithmétique doivent être très simples (en particulier, pas de congruences, pas de théorème de Bézout, pas de théorème de Gauss, pas d'entiers premiers entre eux).

Suites réelles : le tout début

- ★ Modes de définition d'une suite. De façon explicite ou par récurrence.
- ★ Monotonie. Suite minorée, majorée, bornée. Une suite (u_n) est bornée si et seulement si $(|u_n|)$ est majorée.
- ★ Suites stationnaires. Suites arithmétiques, suites géométriques. Les étudiants doivent connaître une méthode de calcul du terme général d'une suite définie par $u_{n+1} = au_n + b$.
- ★ Suites récurrentes linéaires d'ordre deux (la démonstration sera faite dans le cours d'algèbre linéaire).
- ★ Limite d'une suite réelle : Limite finie ou infinie d'une suite. Unicité de la limite. Suite convergente, suite divergente. Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges. Toute suite réelle convergente est bornée.

Une question de savoir-faire

En plus de la preuve et de l'énoncé, un exercice rapide sur une suite arithmético-géométrique ou une suite récurrente linéaire d'ordre 2 sera demandé.

Un énoncé au choix à demander

- ❒ Théorème donnant l'ensemble des solutions d'une EDL_1 sans second membre.
- ❒ Solutions dans le cas réel de $ay''+by'+cy=0$ (où a, b, c constantes réelles, $a \neq 0$).
- ❒ Définition d'un majorant, d'un maximum (si existence).
- ❒ Définition d'un minorant, d'un minimum (si existence).
- ❒ Définition d'une borne supérieure (lorsqu'elle existe), d'une borne inférieure.
- ❒ Définition de la partie entière.
- ❒ Définition des approximations décimales.
- ❒ Définition d'un nombre premier.
- ❒ Théorème de décomposition d'un entier.
- ❒ Définition du pgcd ou du ppcm de deux entiers naturels a et b.
- ❒ Algorithme d'Euclide pour le calcul du pgcd (à expliquer).
- ❒ Définition mathématique d'une limite finie ou infinie.

Démonstrations

- ❒ L'ensemble des nombres premiers est infini.
- ❒ *Un exercice du TD* : Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}, 0 \leq \lfloor nx \rfloor - n\lfloor x \rfloor \leq n-1$.
- ❒ Unicité de la limite finie (si existence).