

Signaux Electriques      SE6 Filtrage linéaire

I Etude d'un filtre ..... 1

    1.) Grandeurs caractéristiques d'un signal sinusoïdal ..... 1

    2.) Définition d'un filtre ..... 2

    3.) Diagramme de Bode du quadripôle. .... 2

II Etude détaillée de filtres du premier ordre ..... 3

    1) Circuit RC série sortie sur C. .... 3

    2) Circuit RC série sortie sur R. .... 5

III Etude détaillée de filtres du second ordre ..... 7

    1) Circuit RLC série sortie sur C. .... 7

    2) Circuit RLC série sortie sur R. .... 9

IV Filtrage d'un signal non sinusoïdal ..... 11

    1.) Théorème de Fourier ..... 11

    2.) Filtre passe-bas du premier ordre ..... 13

    3.) Filtre passe-haut du premier ordre ..... 15

    4.) Filtre passe-bande ..... 16

V Utilisation des filtres ..... 17

    1.) Choix d'un modèle de filtre en fonction d'un cahier des charges. .... 17

    2.) Catalogue de filtres. .... 17

    3.) Mise en cascades de deux filtres. .... 19

    4.) Exemple de filtre non linéaire : le multiplieur ..... 20

VI Capacité numérique : Simuler l'action d'un filtre sur un signal périodique. .... 21

Filtre : opérateur qui permet de sélectionner des signaux utiles, selon leurs fréquences.

Linéaire : ne contient que des dipôles linéaires. La grandeur de sortie a alors la même fréquence que la grandeur d'entrée.

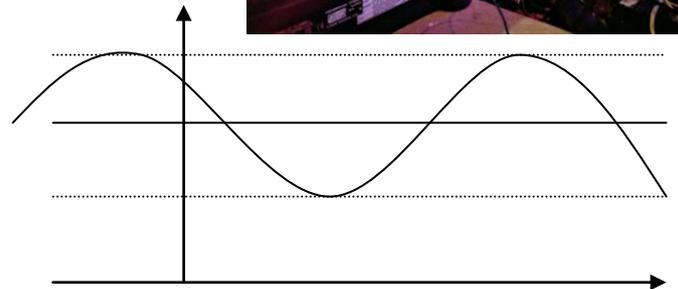


I Etude d'un filtre

1.) Grandeurs caractéristiques d'un signal sinusoïdal

Grandeur sinusoïdale :  $g(t) = G_m \cos(\omega t + \varphi) + \langle g \rangle$

où la valeur moyenne de  $g$  est  $\langle g \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T g(t) dt$



Pour toute la suite du cours, on prendra  $\langle g \rangle = 0$  d'où  $g(t) = G_m \cos(\omega t + \varphi)$

Valeur efficace (ou valeur RMS): valeur du signal continu qui, traversant le même conducteur ohmique, provoque les mêmes pertes Joule moyennes.

$$I_{eff} = \sqrt{\langle i^2(t) \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}$$

$$U_{eff} = \sqrt{\langle u^2(t) \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}$$

Démo : Conducteur ohmique, en régime continu :

Loi d'ohm :  $U = R.I$     Puissance reçue :  $P = U.I = \frac{U^2}{R} = R.I^2$

Conducteur ohmique, en régime périodique : Loi d'Ohm  
Puissance instantanée reçue :

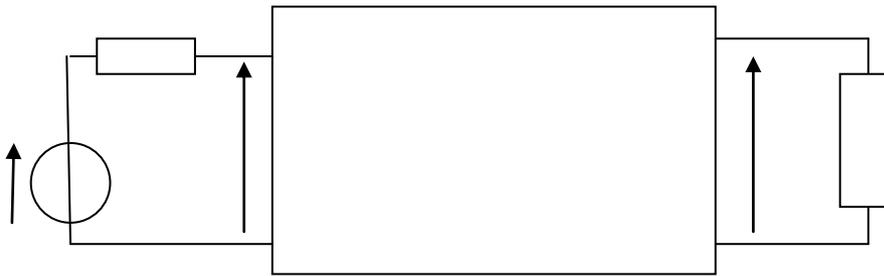
Puissance moyenne :

Signal sinusoïdal :  $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$      $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$      $T = \frac{2\Pi}{\omega} = \frac{1}{f}$      $I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$      $U_{eff} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$

### 2.) Définition d'un filtre

Quadripôle : relié à l'extérieur par 4 bornes. Linéaire : ne contient que des dipôles linéaires.

Passif : ne contient pas de sources indépendantes de tension ou de courant.



En général, on débranche  $Z_u$ .

### 3.) Diagramme de Bode du quadripôle

Amplification en tension (à vide) ou fonction de transfert du quadripôle :  $H(j\omega) = \frac{u_s}{u_e} = \frac{U_{sm}}{U_{em}}$

Gain en tension du quadripôle :  $G(\omega) = +20 \log |H|$

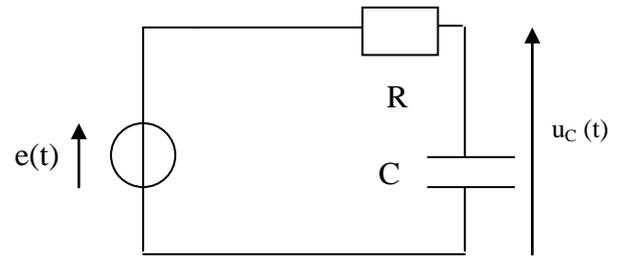
Diagramme de Bode des amplitudes ( ou du gain ) : on trace G en fonction de  $\log \omega$ .

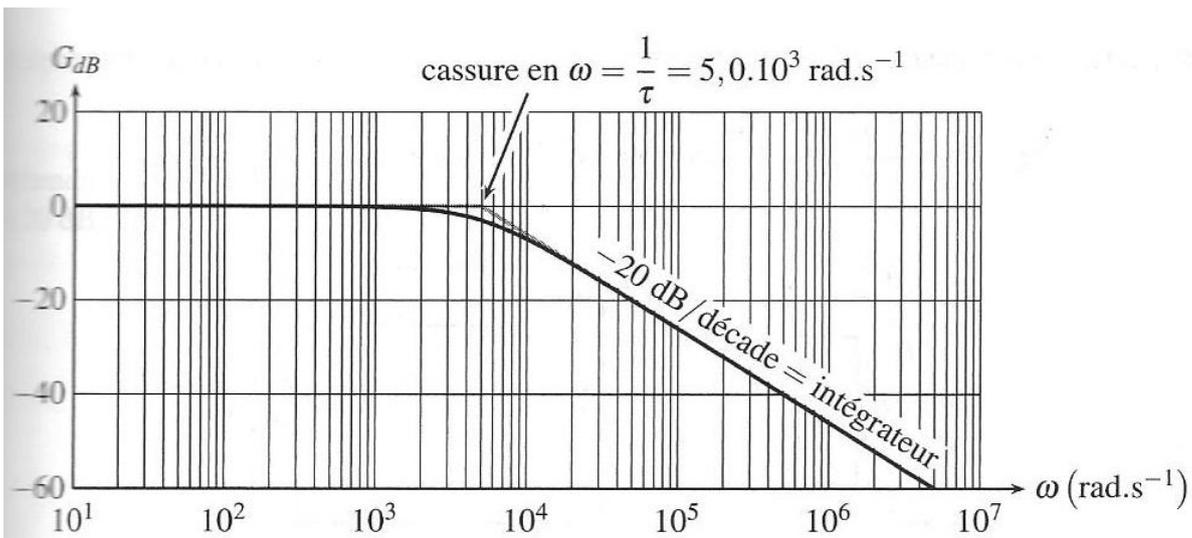
Phase du quadripôle :  $\varphi = \arg(H(j\omega))$

Diagramme de Bode des phases : on trace  $\varphi$  en fonction de  $\log \omega$ .

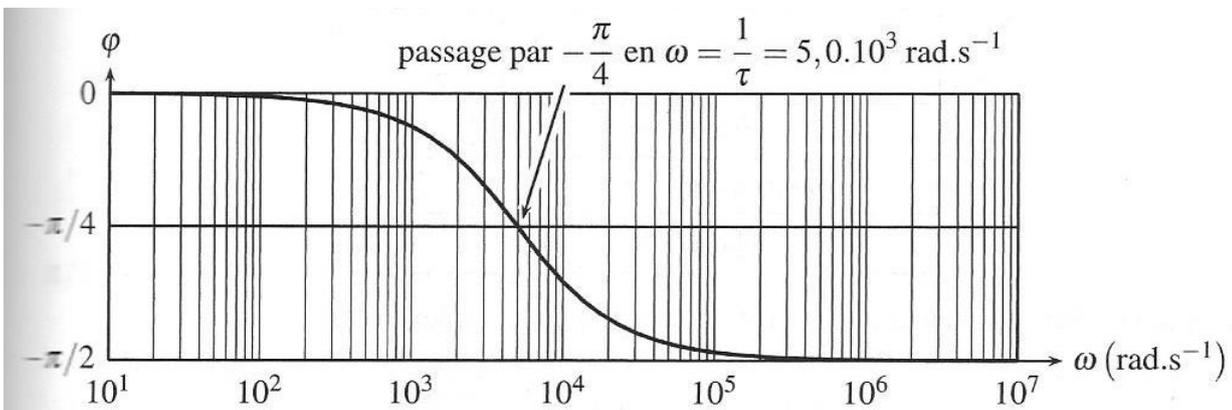
Une décade est l'ensemble des pulsations comprises entre  $\omega$  et  $10\omega$ .

II Etude détaillée de filtres du premier ordre  
1) Circuit RC série sortie sur C.



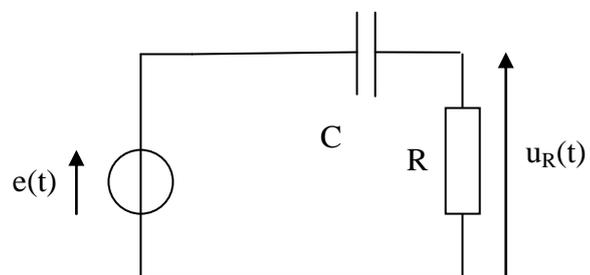


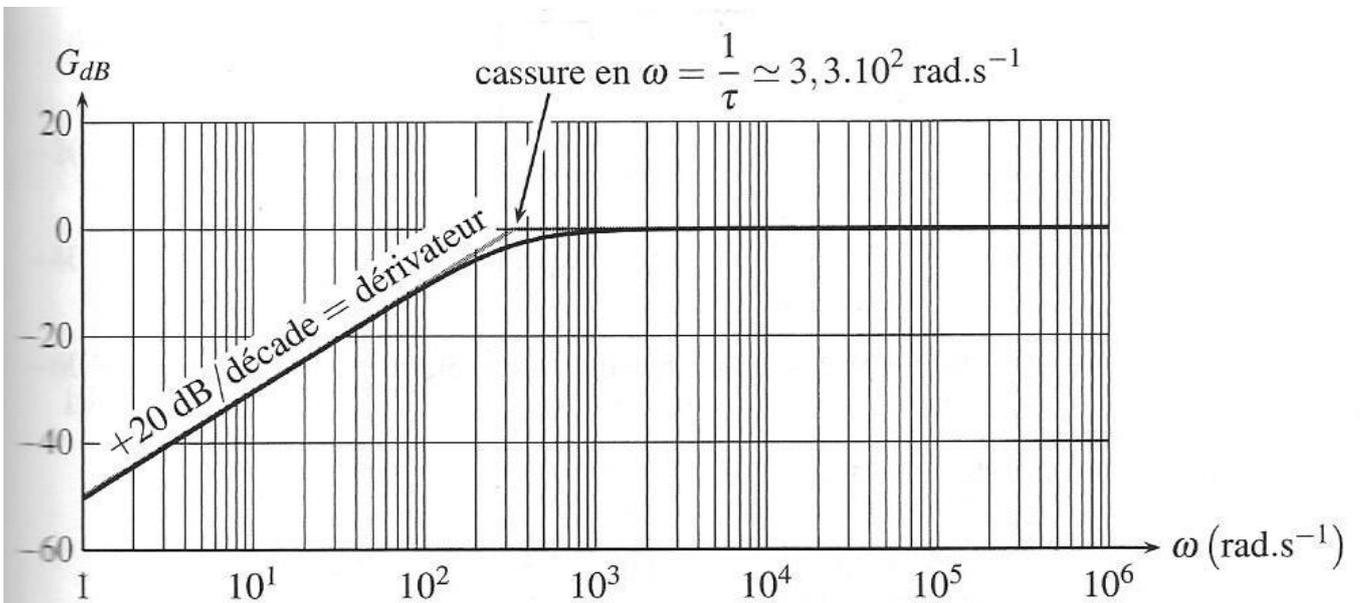
**Figure 11.4** – Gain d'un passe-bas du premier ordre dans le cas où  $\tau = 2,0 \cdot 10^{-4} \text{ s}$  (les asymptotes sont en gris).



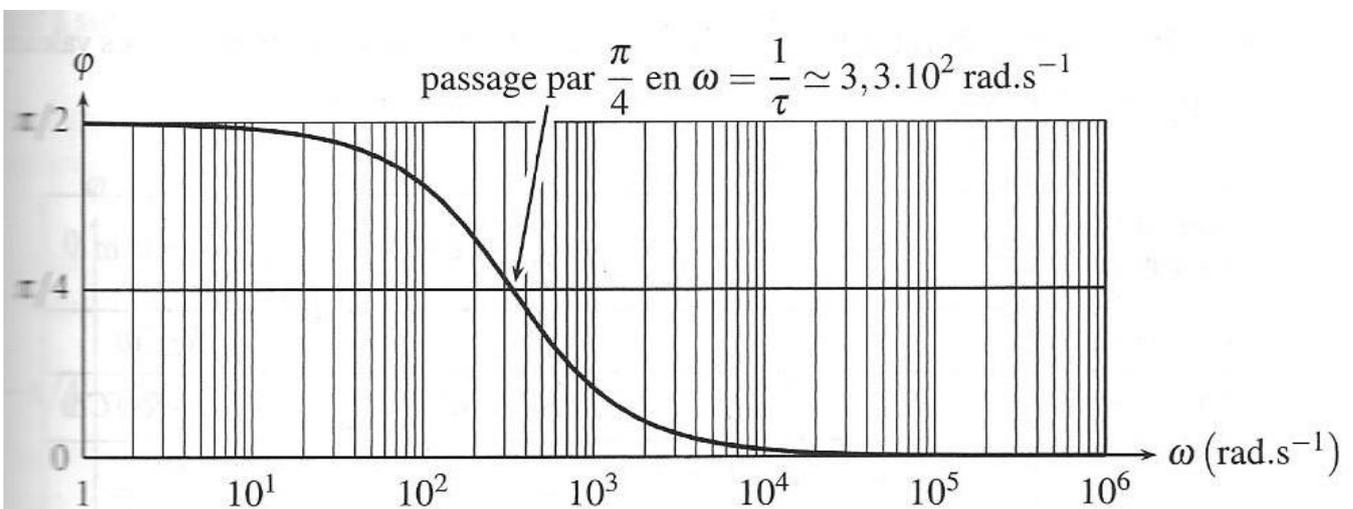
**Figure 11.5** – Phase d'un passe-bas du premier ordre dans le cas où  $\tau = 2,0 \cdot 10^{-4} \text{ s}$ .

2) Circuit RC série sortie sur R.





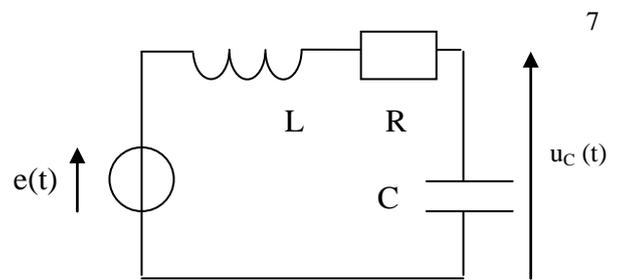
**Figure 11.7** – Gain d'un passe-haut du premier ordre dans le cas où  $\tau = 3,0 \cdot 10^{-3} \text{ s}$  (les asymptotes sont en gris).



**Figure 11.8** – Phase d'un passe-haut du premier ordre dans le cas où  $\tau = 3,0 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ .

### III Etude détaillée de filtres du second ordre

#### 1) Circuit RLC série sortie sur C.



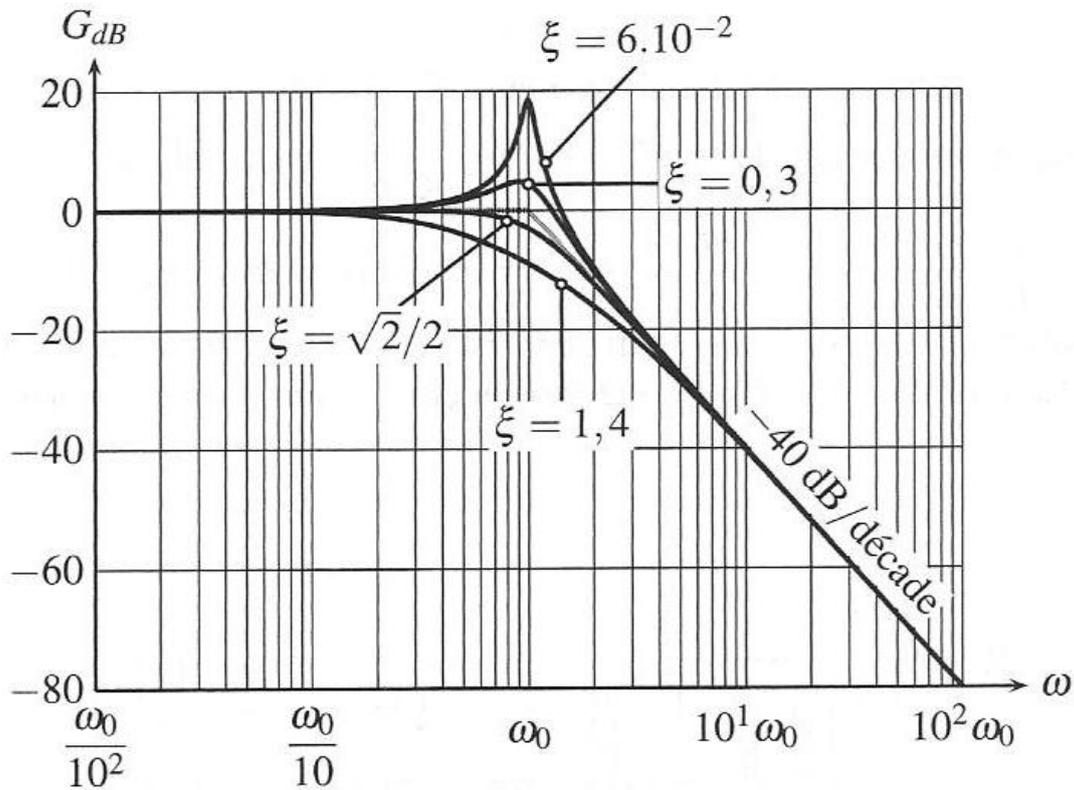


Figure 11.16 – Gain d'un passe-bas du deuxième ordre (les asymptotes sont en gris).

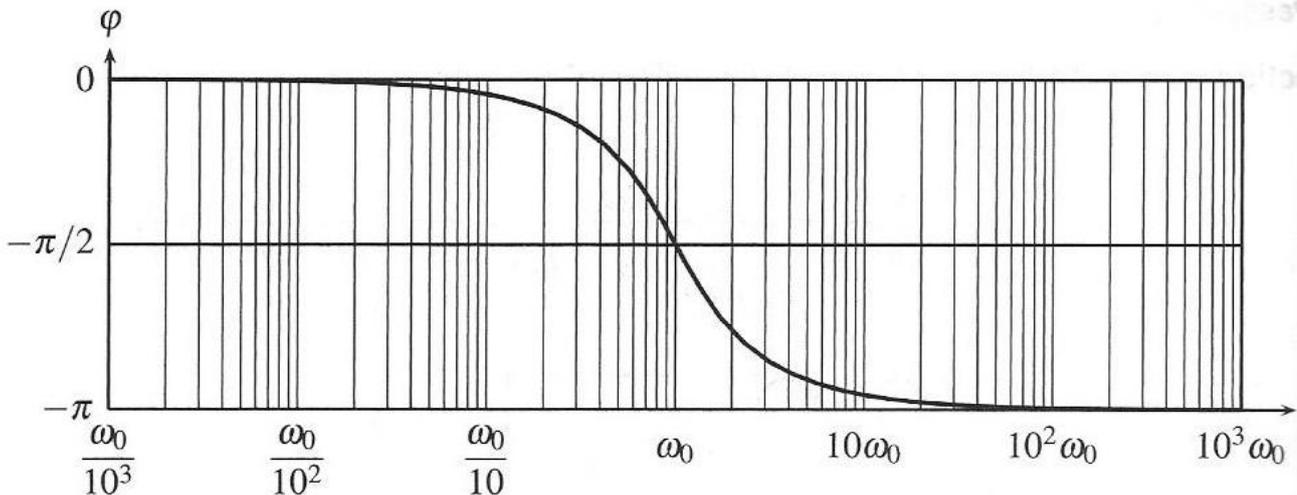
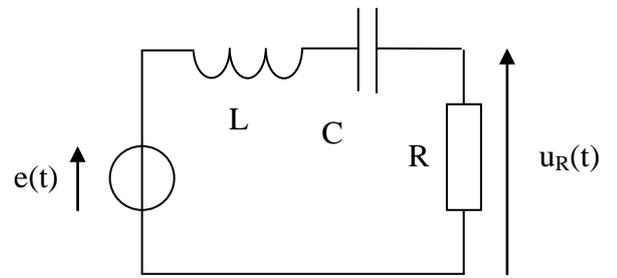
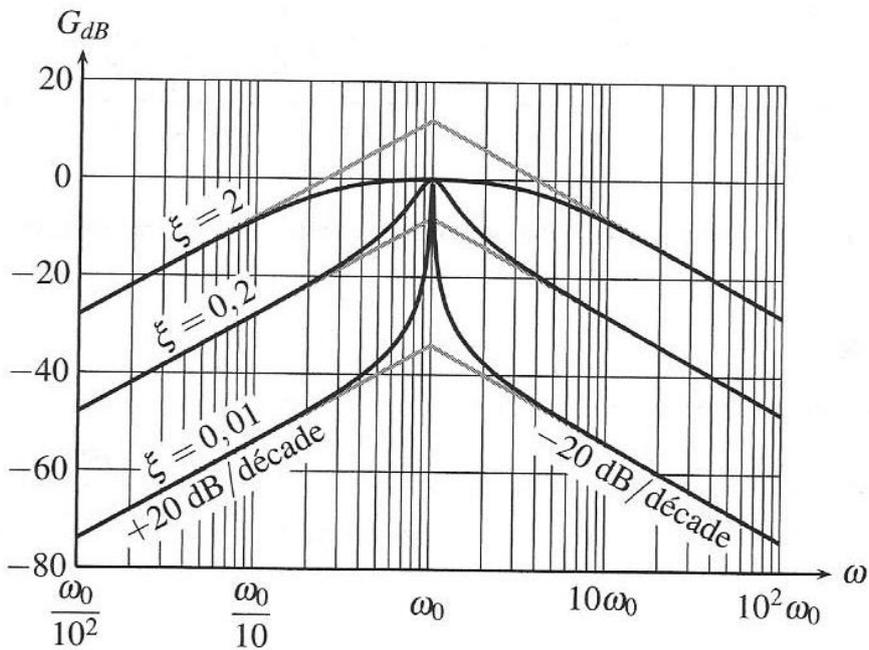


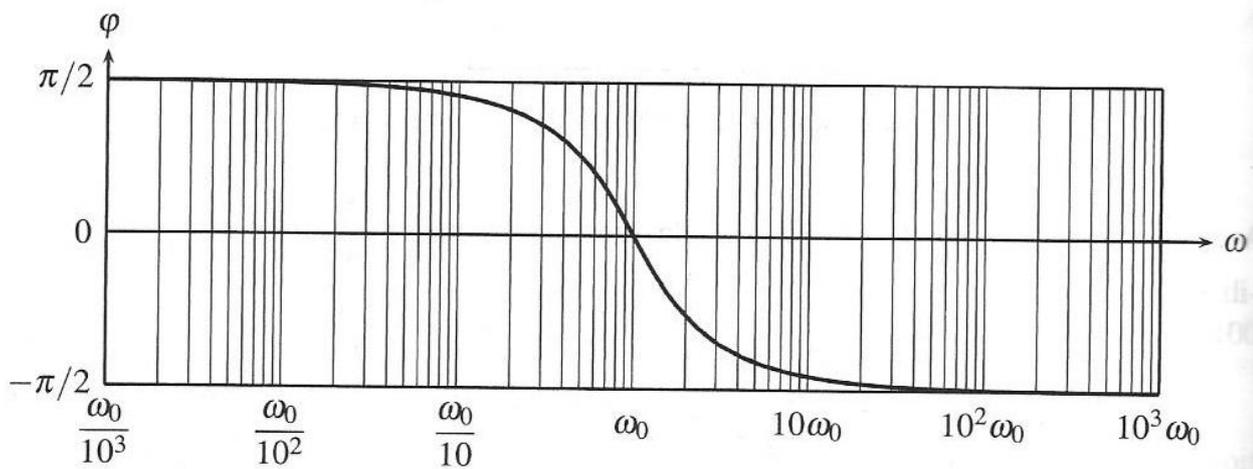
Figure 11.15 – Phase d'un passe-bas du deuxième ordre (tracé pour  $\xi = 0,70$ ).

2) Circuit RLC série sortie sur R.





**Figure 11.18** – Gain d'un passe-bande du deuxième ordre (les expressions asymptotiques sont en gris).



**Figure 11.19** – Phase d'un passe-bande du deuxième ordre (tracé pour  $\xi = 0,70$ ).

## IV Filtrage d'un signal non sinusoïdal

### 1.) Théorème de Fourier

Un théorème mathématique important découvert au début du  $XIX^{\text{ème}}$  siècle par le mathématicien et physicien français Joseph Fourier indique que :

Tout signal périodique de fréquence  $f_S$  et de forme quelconque peut se reconstituer par la superposition de signaux sinusoïdaux de fréquences multiples de  $f_S$  :  $0, f_S, 2f_S, \dots, nf_S, \dots$ . Il peut donc s'écrire sous la forme :

$$s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n f_S t + \varphi_n), \quad (2.2)$$

où les  $A_n$  sont des constantes positives et les  $\varphi_n$  des constantes.

$$s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \text{ où } \omega_n = n \omega_s \text{ et } \omega_s = 2\pi f_s$$

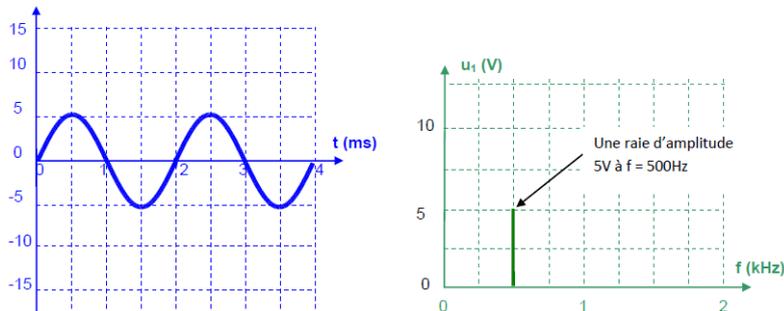
$A_0$  est la composante continue du signal, ou valeur moyenne ou offset.

$A_1$  est l'amplitude du signal fondamental de fréquence  $f_S$ .

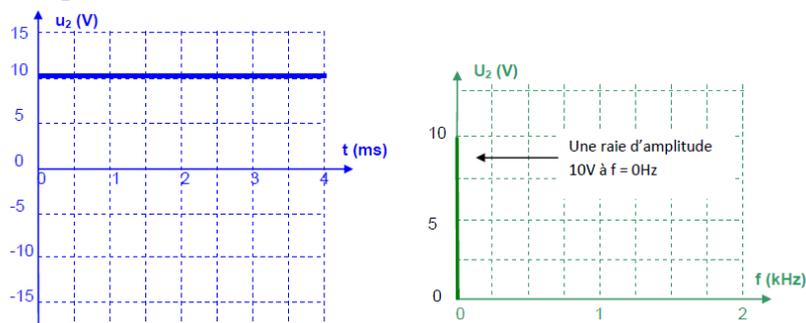
Les  $A_n$  sont les amplitudes des harmoniques de fréquence  $f_n = n f_S$  de rang  $n \geq 2$ .

Analyse spectrale : Opération qui consiste à déterminer la décomposition en signaux sinusoïdaux d'un signal donné.

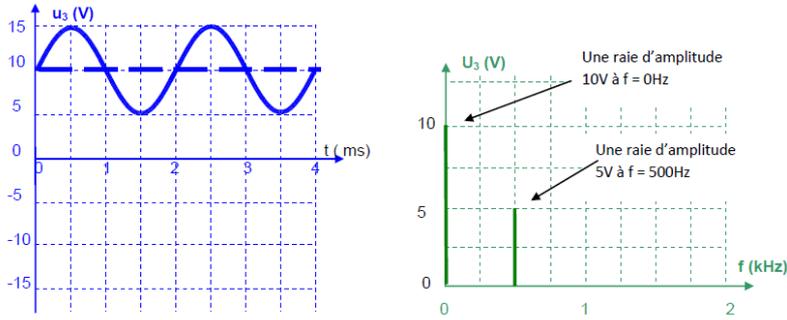
Exemple 1 :  $u_1(t) = 5 \cdot \sin(2\pi \cdot 500 \cdot t)$  ne contient qu'une seule fréquence :  $f = 500 \text{ Hz}$   $T = 2 \text{ ms}$



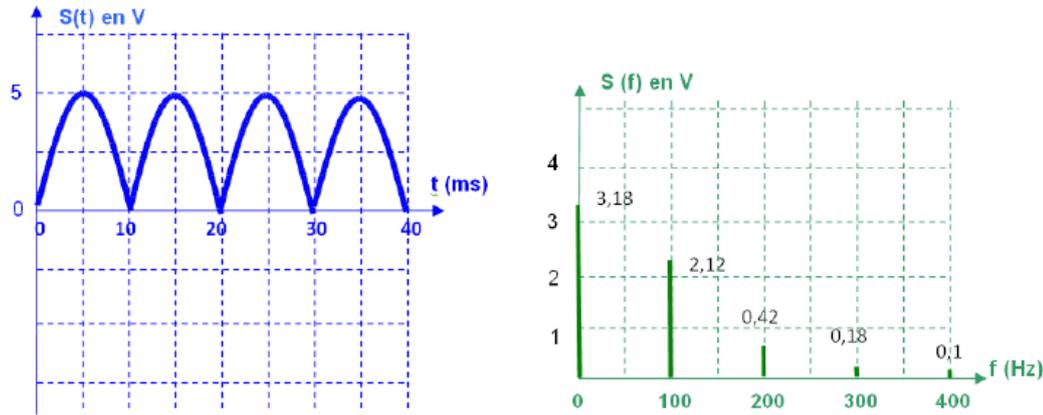
Exemple 2 :  $u_2(t) = U_2 = 10\text{V}$



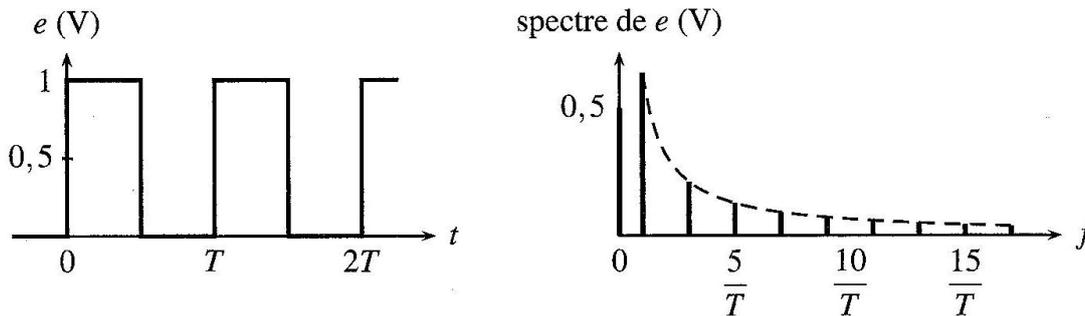
**Exemple 3 :**  $u_3(t) = u_1(t) + u_2(t) = 10 + 5.\sin(2\pi .500.t)$



**Exemple 4 :** Signal sinusoïdal redressé « double alternance »  $f_0 = 50$  Hz



**Exemple 5 :** Signal carré



**Figure 12.14** – Forme d'onde et spectre du signal  $e(t)$ .

**Remarque : Conservation de la puissance**

Pour une tension périodique  $u(t)$  mesurée aux bornes d'une résistance  $R$ , on a la décomposition en série de Fourier :  $u(t) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n,eff} \sqrt{2} \cos(\omega_n t + \varphi_n)$  où  $U_n = U_{n,eff} \sqrt{2}$

On admet que :  $U_{eff}^2 = U_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n,eff}^2$  Formule de Parseval

donc  $\frac{U_{eff}^2}{R} = \frac{U_0^2}{R} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_{n,eff}^2}{R}$  donc  $P_R = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n$

La puissance moyenne absorbée par la résistance  $R$ , due à la tension  $u(t)$  est la somme des puissances dues à chacune des composantes de Fourier de la tension  $u(t)$  (sa valeur moyenne, son fondamental et toutes ses harmoniques).

## 2.) Filtre passe-bas du premier ordre

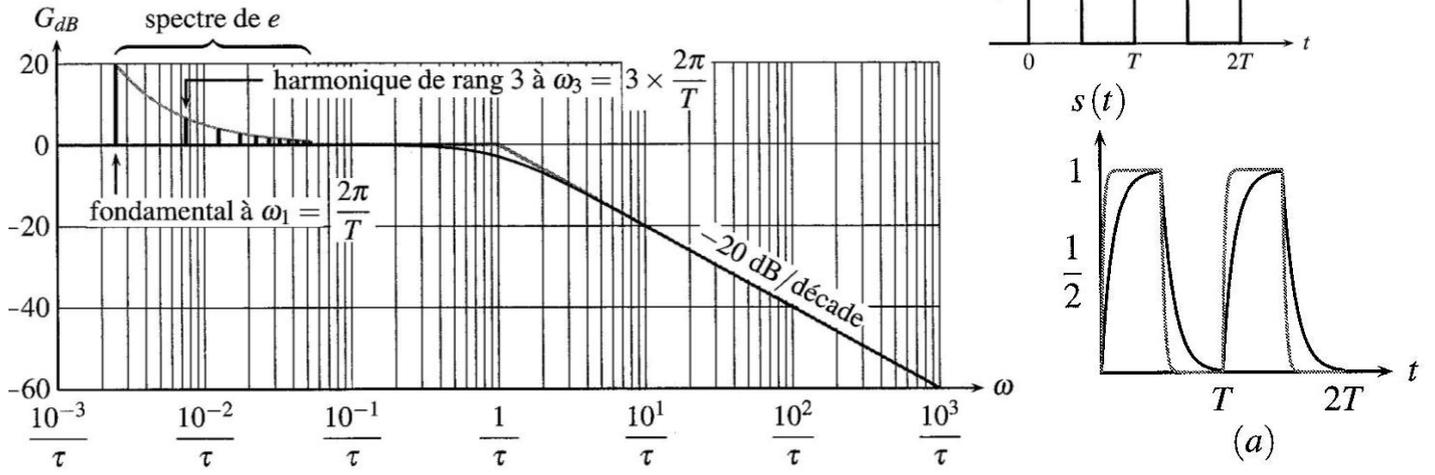


Figure 12.15 – Gain du système et spectre de l'entrée dans le cas où  $\frac{2\pi}{T} \ll \frac{1}{\tau}$ .

Filtrage passe-bas d'un signal créneaux (a)  $T = 50 \tau$  en gris et  $T = 10 \tau$  en noir

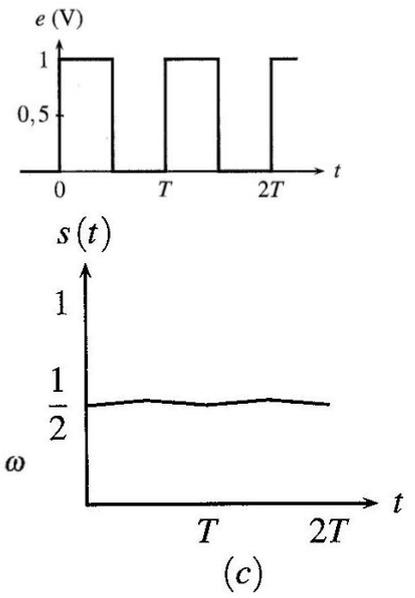
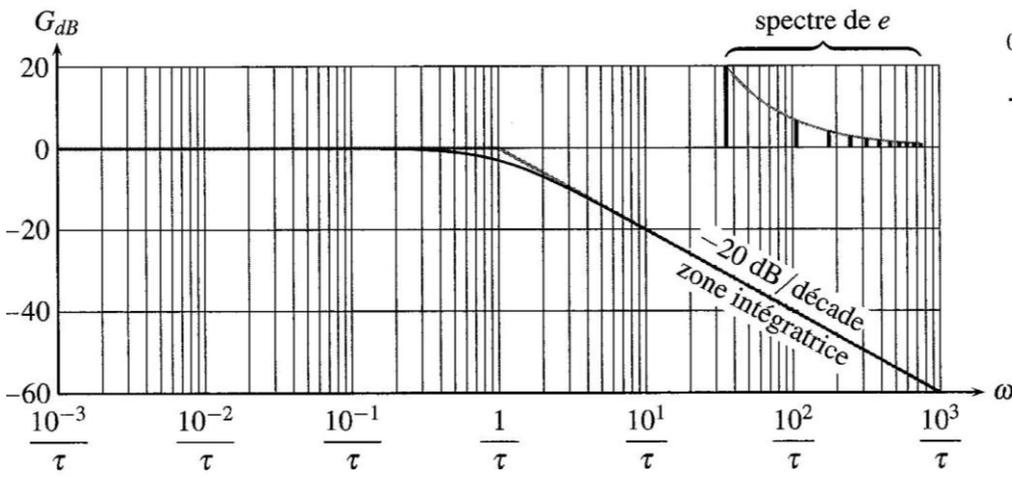
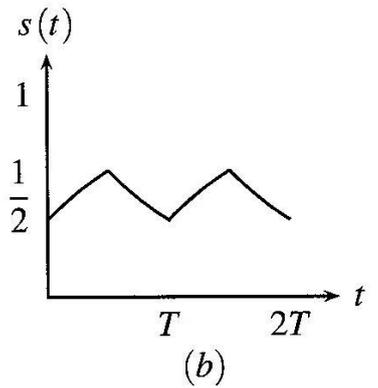
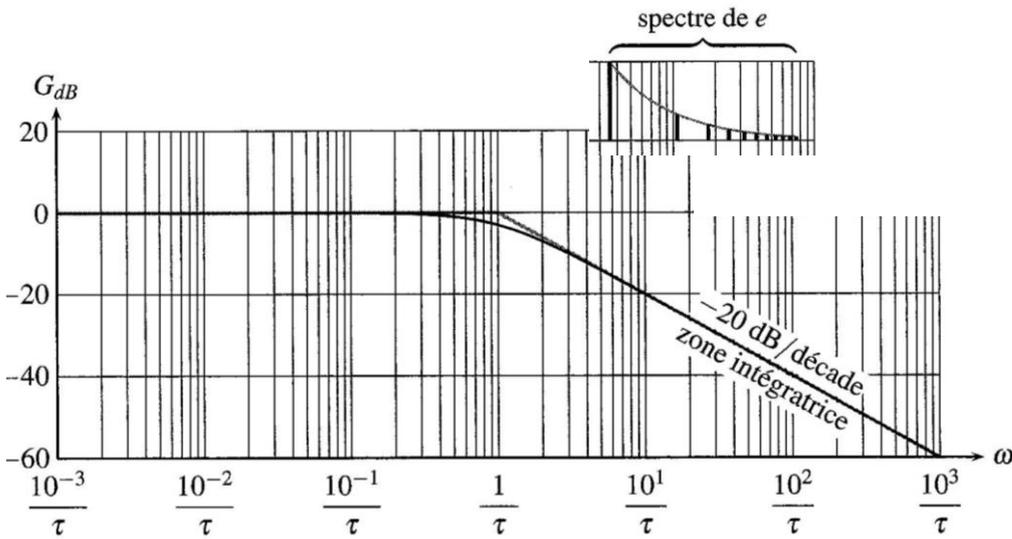


Figure 12.16 – Gain du système et spectre de l'entrée dans le cas où  $\frac{2\pi}{T} \gg \frac{1}{\tau}$ .

Filtrage passe-bas d'un signal créneaux (c)  $T = 0,1 \tau$ .



Filtrage passe-bas d'un signal créneaux (b)  $T = \tau$ .

## 3.) Filtre passe-haut du premier ordre

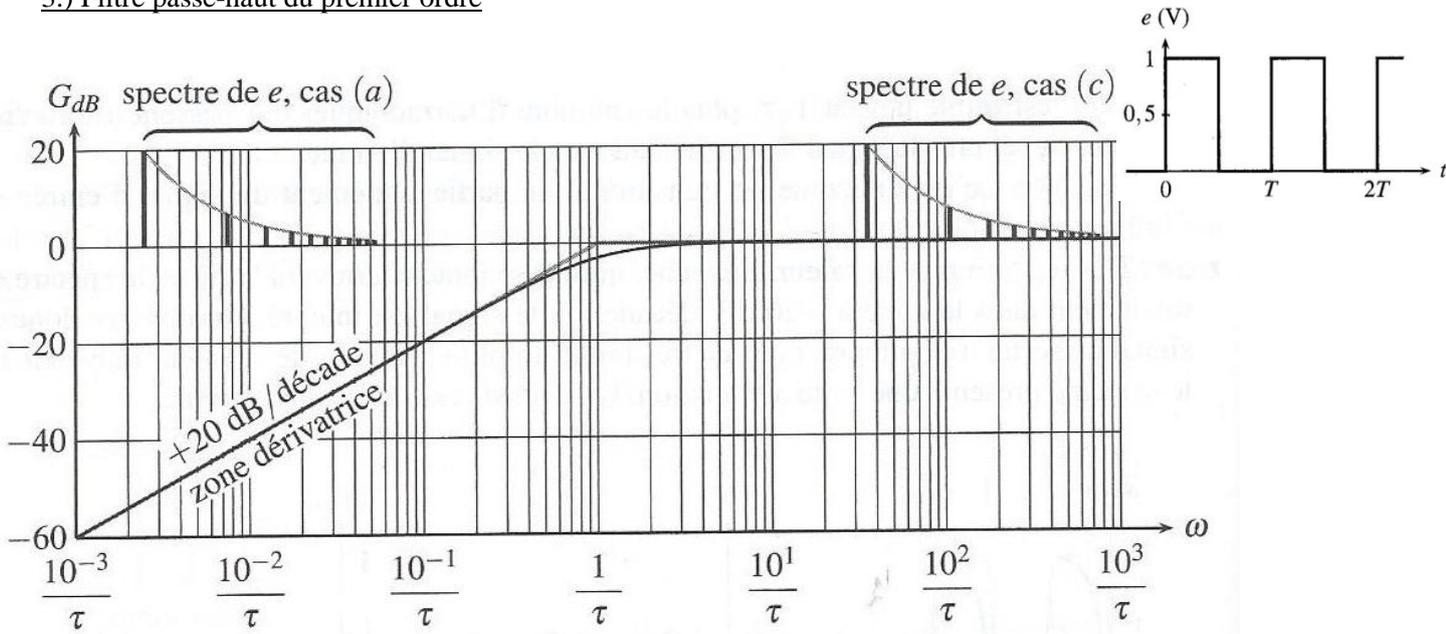


Figure 12.18 – Gain du système et spectre de l'entrée pour un filtrage passe-haut.

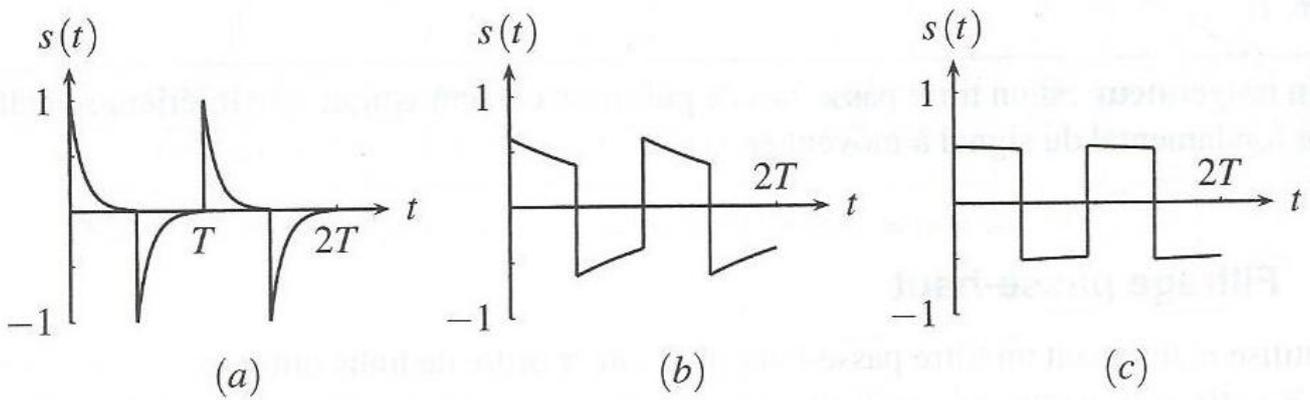


Figure 12.19 – Filtrage passe-haut d'un signal créneau (a)  $T = 10\tau$ , (b)  $T = \tau$ , (c)  $T = 0,1\tau$ .

4.) Filtre passe-bande

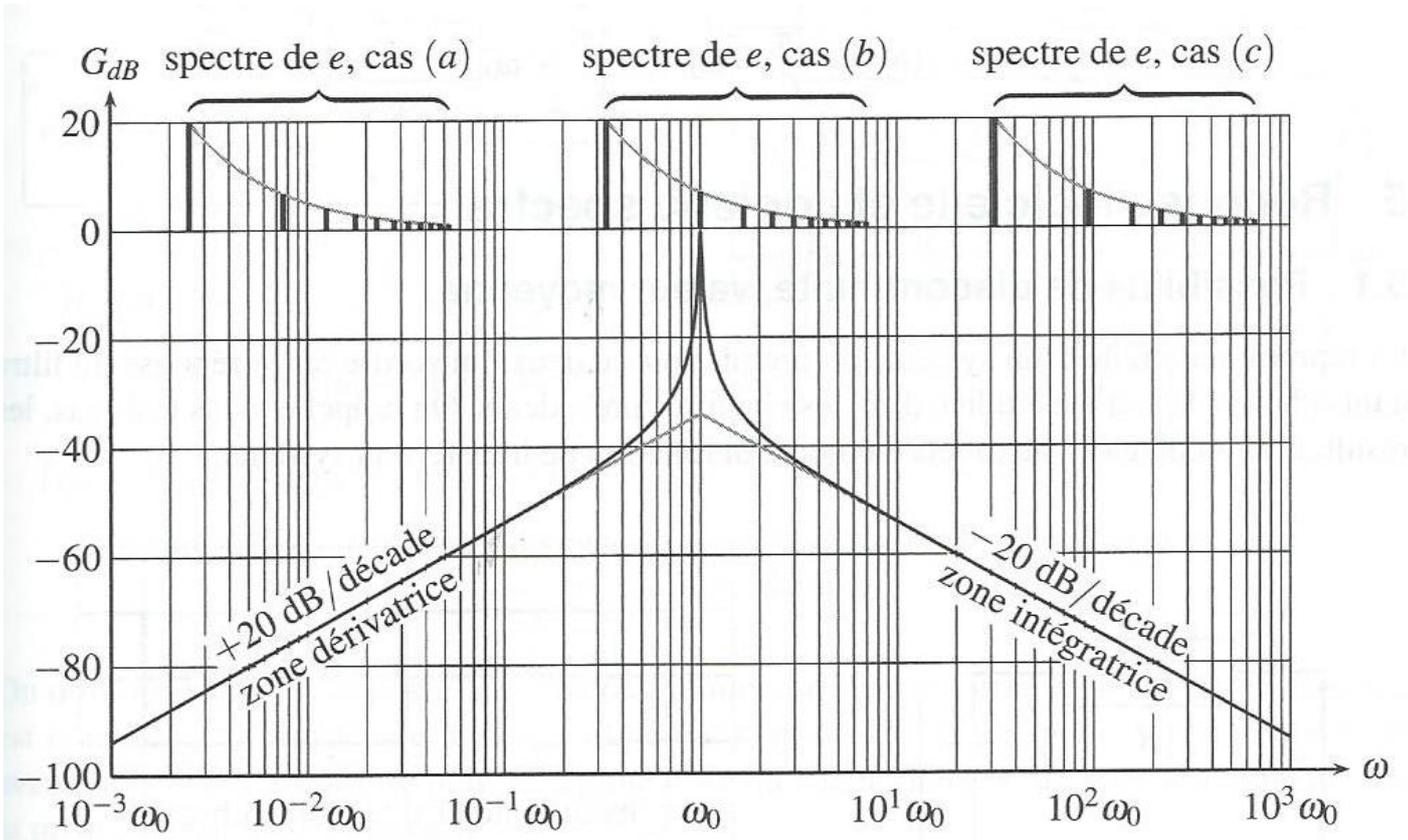


Figure 12.20 – Gain du système et spectre de l'entrée pour un filtrage passe-bande.

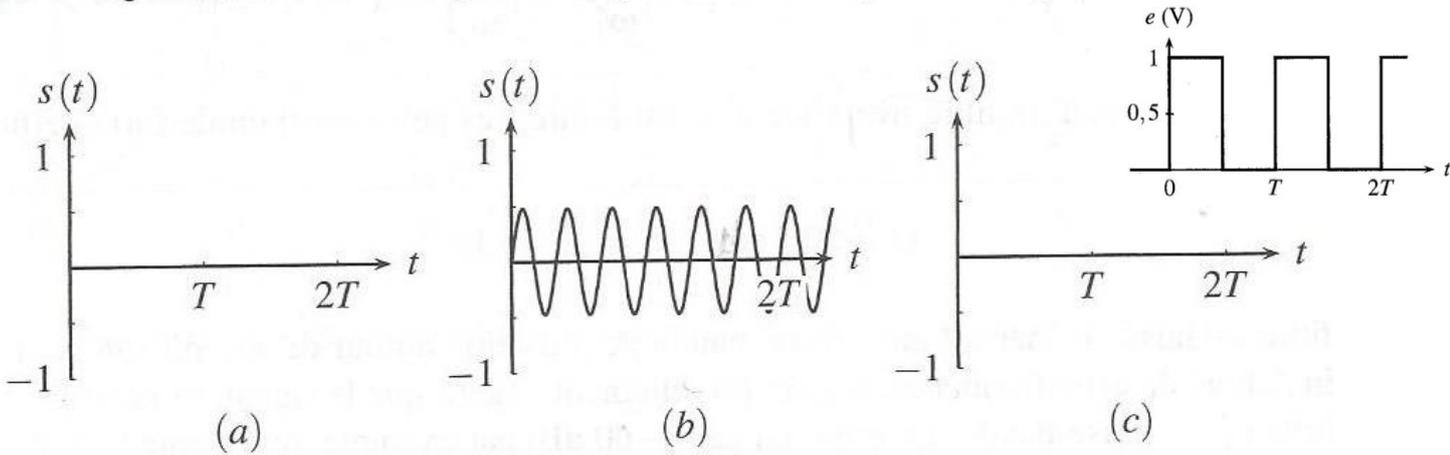


Figure 12.21 – Filtrage passe-bande d'un signal créneau : (a)  $\frac{2\pi}{T} \ll \omega_0$ ,

(b)  $3 \times \frac{2\pi}{T} = \omega_0$ , (c)  $\frac{2\pi}{T} \gg \omega_0$ .

## V Utilisation des filtres

### 1.) Choix d'un modèle de filtre en fonction d'un cahier des charges.

On est donc amené à définir un gabarit du filtre à construire. Un filtre **passé-bas** a pour fonction de laisser passer toutes les fréquences inférieures à  $f_p$  (indice  $p$  pour passante) et d'éliminer toutes les fréquences supérieures à  $f_a$  (indice  $a$  pour atténuée). On définit alors :

- la dernière **fréquence passante**  $f_p$  (le filtre doit laisser passer les fréquences  $f < f_p$ ),
- le **gain minimum**  $G_{sup}$ , en dB, pour les fréquences qui passent à travers le filtre (il ne doit pas être trop faible, car ces fréquences doivent sortir du filtre sans être atténuées),
- la première **fréquence atténuée**  $f_a$  (toutes les fréquences  $f > f_a$  doivent être éliminées par le filtre),
- le **gain maximum**  $G_{inf}$  pour les fréquences atténuées. Le gain du filtre à ces fréquences doit être inférieur à  $G_{inf}$  pour être sûr qu'elles soient éliminées.

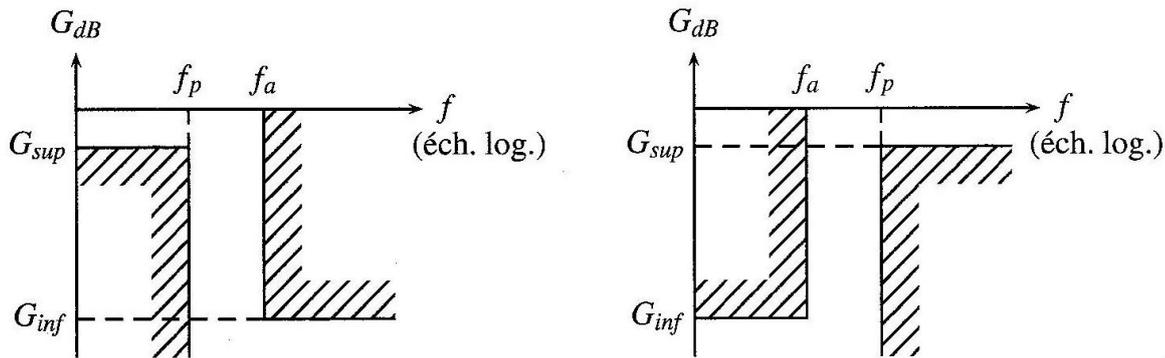


Figure 11.25 – Gabarit (a) d'un passe-bas (b) d'un passe-haut.

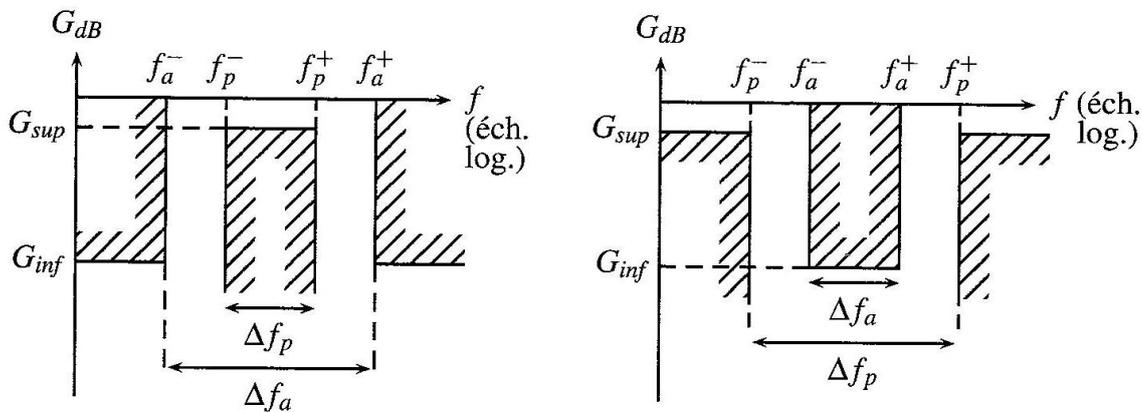


Figure 11.26 – Gabarit (c) d'un passe-bande (d) d'un coupe-bande.

### 2.) Catalogue de filtres.

Passé bas	Permet de recueillir l'information sur la forme générale du signal. Moyenneur.	
Premier ordre : - RC série sortie sur C - RL série sortie sur R (TD)	$\underline{H} = \frac{1}{1 + jx}$	Intégrateur à haute fréquence

Second ordre : - RLC série sortie sur C	$\underline{H} = \frac{1}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$	Double intégrateur à haute fréquence
Passé haut	Permet de recueillir l'information relative aux détails du signal. Élimine la valeur moyenne.	
Premier ordre : - RC série sortie sur R - RL série sortie sur L (TD)	$\underline{H} = \frac{jx}{1 + jx}$	Dérivateur à basse fréquence
Second ordre : - RLC série sortie sur L (TD)	$\underline{H} = \frac{-x^2}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$	Double dérivateur à basse fréquence
Passé bande	Sélectionne une fréquence particulière. Coupe les hautes et basses fréquences.	
Second ordre : - RLC série sortie sur R	$\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})}$	Dérivateur à basse fréquence Intégrateur à haute fréquence
Coupe bande	Élimine une fréquence particulière.	
Second ordre : - RLC série sortie sur (L,C) (TD)	$\underline{H} = \frac{1 - x^2}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$	

### 3.) Mise en cascades de deux filtres.

#### a) Impédances d'entrée et de sortie.

Impédance d'entrée :  $\underline{Z}_e = \frac{\underline{u}_e}{\underline{i}_e}$  En présence de  $\underline{Z}_u$  : impédance d'entrée en charge.

En l'absence de  $\underline{Z}_u$  : impédance d'entrée à vide.

On a un dipôle linéaire passif vu de l'entrée (entre A et B) : il est modélisable depuis l'entrée par une impédance équivalente puisqu'il ne contient pas de générateur.

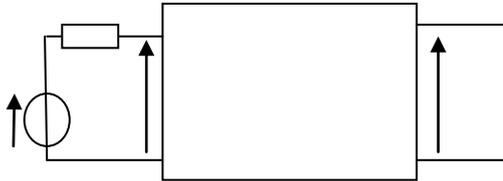
Pour la calculer, on débranche le générateur et on fait des schémas équivalents.



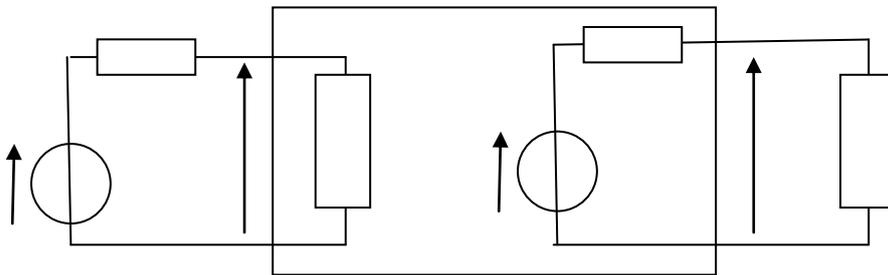
#### Impédance de sortie

On a un dipôle linéaire actif vu de la sortie (entre C et D) : il est modélisable depuis la sortie par un générateur équivalent de Thévenin.

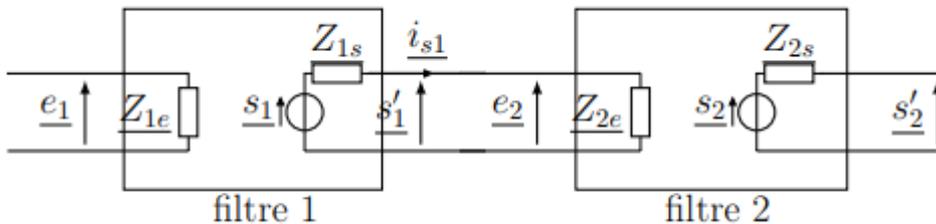
Pour la calculer, on débranche la charge et on fait des schémas équivalents.  $\underline{Z}_s = -\frac{\underline{u}_s}{\underline{i}_s}$



#### Schéma équivalent global :



#### b) Mise en cascade.



$$\text{On veut : } \underline{H} = \frac{\underline{s}_2}{\underline{e}_1} = \frac{\underline{s}_2}{\underline{e}_2} \times \frac{\underline{s}_1}{\underline{e}_1} = \underline{H}_2 \times \underline{H}_1$$

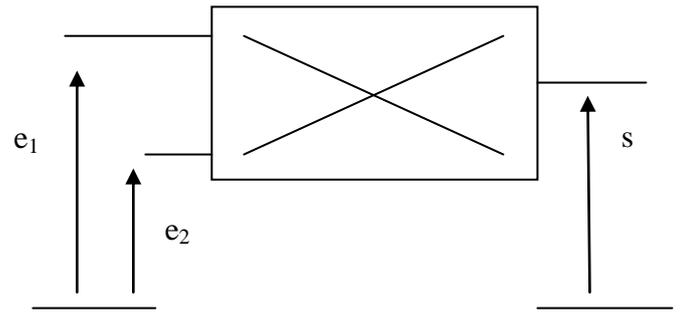
Pour trouver ce résultat, il faut :  $\underline{i}_{s1} = 0$ , soit  $\underline{Z}_{2e} \gg 1$  et  $\underline{e}_2 = \underline{s}_1$  soit  $\underline{Z}_{2e} \gg \underline{Z}_{1s}$   
C'est ce qu'on appelle l'adaptation d'impédance.

#### 4.) Exemple de filtre non linéaire : le multiplieur

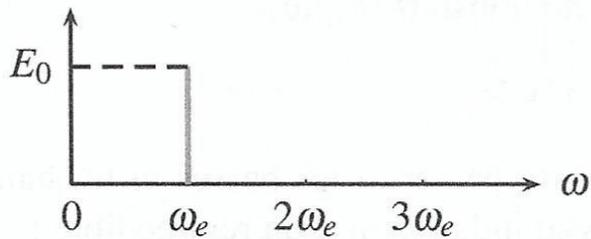
On aura en sortie :  $s(t) = k \cdot e_1(t) \cdot e_2(t)$  où  $k$  est le gain du multiplieur (en  $V^{-1}$ ).

Si  $e_1(t) = e_2(t) = E_0 \cos(\omega_e t)$ ,

$$\text{alors } s(t) = k E_0^2 \cos^2(\omega_e t) = k E_0^2 \frac{1 + \cos(2\omega_e t)}{2}$$



spectre de  $e$



spectre de  $s$

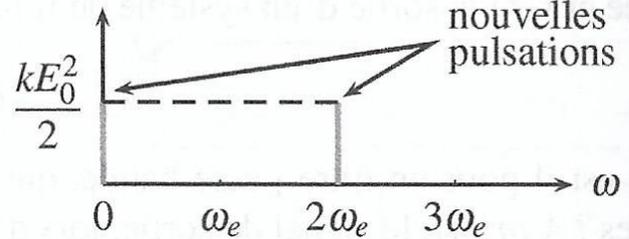


Figure 10.18 – Spectres des signaux d'entrée et de sortie du multiplieur.

## VI Capacité numérique : Simuler l'action d'un filtre sur un signal périodique.

```

1  ##SE6 Capacité numérique
2  ##effet d'un filtre sur un signal périodique
3
4  ##exemple du signal créneau et des filtres passe bas et passe haut du premier ordre (variable fo)
5
6  ##importation des bibliothèques
7
8  import numpy as np
9  import scipy.integrate as spi
10 import matplotlib.pyplot as plt
11
12 ##definition des filtres du premier ordre:
13 ##Filtre passe bas
14 def passebas(f,fo):#définition du module de H#
15     x=f/fo
16     h=1/(1+x**2)**(0.5)
17     return(h)
18
19 def phasebas(f,fo):#définition du l'argument de H#
20     x=f/fo
21     phib=-np.arctan(x)
22     return(phib)
23
24 ##Filtre passe haut
25 def passehaut(f,fo):
26     x=f/fo
27     h=x/(1+x**2)**(0.5)
28     return(h)
29
30 def phasehaut(f,fo):
31     x=f/fo
32     phih=-np.arctan(x)+np.pi/2
33     return(phih)
34
35 ##spectre du signal d'entrée créneau:
36
37 F=[0] #frequence nulle
38 f=1000 #fondamental
39 N=200 #nombres d'harmoniques
40 for k in range(1,N):#Les fréquences des harmoniques#
41     y=f*k
42     F.append(y)
43
44
45 Ae=[0.5] #composante continue
46 A=1 #amplitude du fondamental
47 for k in range(1,N):#cas d'un signal creneau
48     if k%2==0:
49         y=0
50     else:
51         y=A/k
52     Ae.append(y)
53
54 ##fonction produit de listes:
55
56 def prod(A,B):
57     C=[]
58     for k in range(len(A)):
59         x=A[k]*B[k]
60         C.append(x)
61     return(C)
62
63 ##calcul du spectre en sortie
64
65 fo=2000 #fréquence de coupure du filtre#
66
67 Hpb=[passebas(freq,fo) for freq in F]#création de la liste des amplitudes#
68 Aspb=prod(Hpb,Ae)
69 phipb=[phasebas(freq,fo) for freq in F]#création de la liste des arguments#
70
71 Hph=[passehaut(freq,fo) for freq in F]
72 Asph=prod(Hph,Ae)
73 phiph=[phasehaut(freq,fo) for freq in F]

```

```

76 ##tracé des courbes
77
78 ##effet du passe bas
79
80 plt.bar(F,Ae,200,color='r',label="Signal d'entrée")
81 plt.bar(F,Aspb,100,color='b',label='Signal de sortie du passe-bas')
82
83 plt.xlabel('frequences')
84 plt.ylabel('An')
85 plt.axis([-2000,20000,0,1])
86 plt.title('spectres de fréquence')
87 plt.legend()
88
89
90 ##effet du passe haut
91 plt.figure()
92 plt.bar(F,Ae,200,color='r',label="Signal d'entrée")
93 plt.bar(F,Asph,100,color='b',label='Signal de sortie du passe-haut')
94
95 plt.xlabel('frequences')
96 plt.ylabel('An')
97 plt.axis([-2000,20000,0,1])
98 plt.title('spectres de fréquence')
99 plt.legend()
100
101
102
103 ##Courbes temporelles
104 les_t=np.linspace(0,3/f,2000)#intervalle de temps
105
106 les_e=[]#Création de la liste des amplitudes pour la tension d'entrée#
107 les_sb=[]#Création de la liste des amplitudes pour la tension de sortie#
108 les_sh=[]
109
110 for t in les_t:
111     e=Ae[0]
112     sb=Aspb[0]
113     sh=Asph[0]
114     for k in range (1,N):
115         e=e+Ae[k]*np.sin((2*np.pi*f*k)*t)
116         sb=sb+Aspb[k]*np.sin((2*np.pi*f*k)*t+phipb[k])
117         sh=sh+Asph[k]*np.sin((2*np.pi*f*k)*t+phiph[k])
118     les_e.append(e)
119     les_sb.append(sb)
120     les_sh.append(sh)
121
122 plt.figure()
123 plt.plot(les_t,les_e)
124 plt.title('signal d entrée: e(t)')
125 plt.xlabel('t(s)')
126 plt.ylabel('e(V)')
127 plt.figure()
128 plt.plot(les_t,les_sb)
129 plt.title('s(t) pour le filtre passe bas')
130 plt.xlabel('t(s)')
131 plt.ylabel('e(V)')
132 plt.figure()
133 plt.plot(les_t,les_sh)
134 plt.title('s(t) pour le filtre passe haut')
135 plt.xlabel('t(s)')
136 plt.ylabel('e(V)')
137
138 plt.show()

```