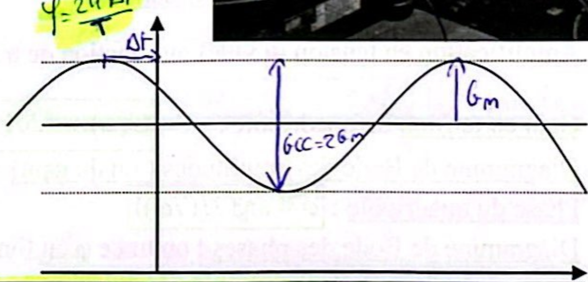
Signaux Electriques SE6 Filtrage linéaire

Filtre : opérateur qui permet de sélectionner des signaux utiles, selon leurs fréquences.

Linéaire : ne contient que des dipôles linéaires. La grandeur de sortie a alors la même fréquence que la grandeur d'entrée.

I Etude d'un filtre

1.) Grandeurs caractéristiques d'un signal sinusoïdal



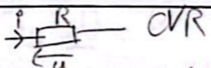
Grandeur sinusoïdale : $g(t) = G_m \cos(\omega t + \varphi) + \langle g \rangle$

où la valeur moyenne de g est $\langle g \rangle = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T g(t)dt$

Pour toute la suite du cours, on prendra $\langle g \rangle = 0$ d'où $g(t) = G_m \cos(\omega t+\varphi)$

Valeur efficace (ou valeur RMS): valeur du signal continu qui, traversant le même conducteur ohmique, provoque les mêmes pertes Joule moyennes.

$$I_{eff} = \sqrt{\langle i^2(t) \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt} \qquad U_{eff} = \sqrt{\langle u^2(t) \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt}$$



Loi d'Ohm $u(t) = Ri(t)$

Puissance instantanée : $p(t) = u(t)\times i(t) = \frac{u^2(t)}{R} = Ri^2(t)$

Démo : Conducteur ohmique, en régime continu :

Loi d'ohm : U = R.I Puissance reçue : $P = U.I = \dfrac{U^2}{R} = R.I^2$

Conducteur ohmique, en régime périodique : Loi d'Ohm

Puissance instantanée reçue :

Puissance moyenne : $P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt$

$P = \frac{1}{T}\int_0^T R i^2(t)\,dt = R \times \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T R i^2(t)}_{I_{eff}^2} = R\, I_{eff}^2$

$P = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{u^2(t)}{R}\,dt = \frac{1}{R} \times \underbrace{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\,dt}_{U_{eff}^2} = \frac{1}{R} U_{eff}^2.$

Signal sinusoïdal : $i(t) = Im \cos(\omega t+\varphi_i)$ $\quad u(t) = Um \cos(\omega t+\varphi_u)$ $\boxed{T = \frac{2\Pi}{\omega} = \frac{1}{f}}$ $\boxed{I_{eff} = \frac{Im}{\sqrt{2}}}$ $\boxed{U_{eff} = \frac{Um}{\sqrt{2}}}$

démo : $I_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\,dt$

$= \frac{1}{T}\int_0^T Im^2 \cos^2(\omega t+\varphi_i)\,dt$

$= \frac{Im^2}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t+\varphi_i)\,dt$ $\quad \cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1 \Rightarrow \cos^2(a) = \frac{\cos(2a)+1}{2}$

$= \frac{Im^2}{2T}\int_0^T (1+\cos(2\omega t+2\varphi_i))\,dt$

$I_{eff}^2 = \frac{Im^2}{2T}\left[t + \frac{1}{2\omega}\sin(2\omega t+2\varphi_i)\right]_0^T$

$I_{eff}^2 = \frac{Im^2}{2T}\left(T + \frac{1}{2\omega}\sin(2\omega T+2\varphi_i) - \frac{1}{2\omega}\sin(2\varphi_i)\right)$

$I_{eff}^2 = \frac{Im^2}{2T}\left(T + \frac{\sin(2\omega T+2\varphi_i) - \sin(2\varphi_i)}{2\omega}\right)$ où $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$I_{eff}^2 = \frac{Im^2}{2T}\left(T + \frac{\sin(\frac{4\pi T}{T}+2\varphi_i) - \sin(2\varphi_i)}{2\omega}\right)$

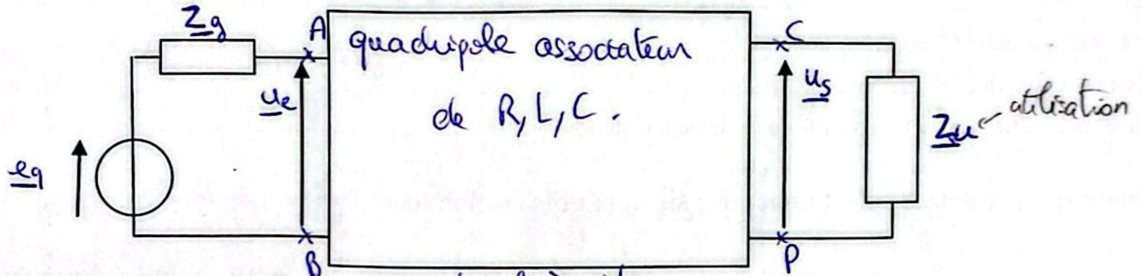
$I_{eff}^2 = \frac{Im^2}{2T}\left(T + \frac{\sin(2\varphi_i) - \sin(2\varphi_i)}{2\omega}\right)$

car sin 2π-periodique donc $\sin(4\pi + 2\varphi_i) = \sin(2\varphi_i)$

$\boxed{I_{eff} = \frac{Im}{\sqrt{2}}}$

2.) Définition d'un filtre

Quadripôle : relié à l'extérieur par 4 bornes. Linéaire : ne contient que des dipôles linéaires.
Passif : ne contient pas de sources indépendantes de tension ou de courant.



En général, on débranche Zu. $\rightarrow$ quadripole à vide

3.) Diagramme de Bode du quadripôle

Amplification en tension (à vide) ou fonction de transfert du quadripôle : $\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{\underline{U}_{sm}}{\underline{U}_{em}}}$

Gain en tension du quadripôle : $\boxed{G(\omega) = +20\log|\underline{H}|}$ ~~xxx~~ $\log \neq \ln$

Diagramme de Bode des amplitudes (ou du gain) : on trace G en fonction de logω.

Phase du quadripôle : $\boxed{\varphi = \arg(\underline{H}(j\omega))}$

Diagramme de Bode des phases : on trace φ en fonction de logω.

Une décade est l'ensemble des pulsations comprises entre ω et 10ω.

démo :

$u_e(t) = U_{em}\cos(\omega t+\varphi_e)$

$\hookrightarrow \underline{u_e}(t) = U_{em}\, e^{j(\omega t+\varphi_e)} = \underline{U_{em}}\, e^{j\omega t}$

$u_s(t) = U_{sm}\cos(\omega t+\varphi_s)$

$\rightarrow \underline{u_s}(t) = U_{sm}\, e^{j(\omega t+\varphi_s)} = \underline{U_{sm}}\, e^{j\omega t}$

Amplitudes complexes : $\underline{U_{em}} = U_{em}\, e^{j\varphi_e}$, $\underline{U_{sm}} = U_{sm}\, e^{j\varphi_s}$

$\underline{H} = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = \frac{\underline{U_{sm}}\, e^{j\omega t}}{\underline{U_{em}}\, e^{j\omega t}} = \frac{\underline{U_{sm}}}{\underline{U_{em}}} = \frac{U_{sm}\, e^{j\varphi_s}}{U_{em}\, e^{j\varphi_e}} = \frac{U_{sm}}{U_{em}} e^{j(\varphi_s-\varphi_e)}$

$\boxed{\underline{H} = \frac{U_{sm}}{U_{em}} e^{j(\varphi_s-\varphi_e)}}$

$\begin{cases} |\underline{H}| = \frac{U_{sm}}{U_{em}} \\ \varphi = \arg(\underline{H}) = \varphi_s - \varphi_e \end{cases}$

Rq : octave : ensemble des pulsations comprises entre ω et 2ω

Rq importante : "Tracer le diagramme de Bode" = Tracer les 2 diagrammes (amplitude + phase)

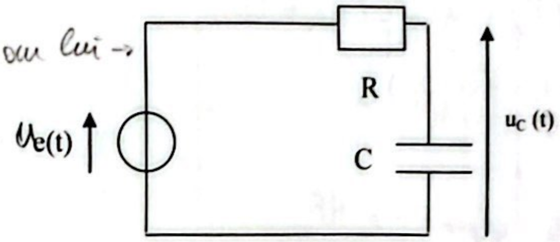
Rq : $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10} = \frac{\ln x}{2{,}3}$

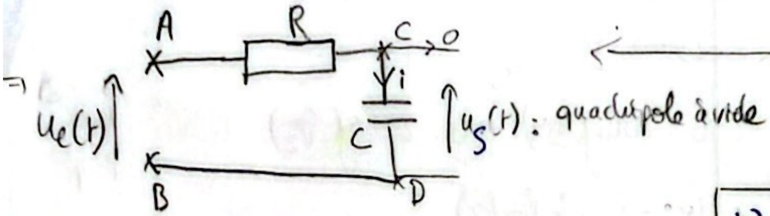
$y = \log x \Leftrightarrow x = 10^y$

II Etude détaillée de filtres du premier ordre

1) Circuit RC série sortie sur C.

on travaille sur lui →





a) Etude préliminaire :

$\underline{u_e} = \underline{U_{em}}\, e^{j\omega t}$ et $\underline{u_s} = \underline{U_{sm}}\, e^{j\omega t}$

fonction de transfert : $\underline{H} = \dfrac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = \dfrac{\underline{U_{sm}}}{\underline{U_{em}}} = \dfrac{U_{sm}}{U_{em}} e^{j(\varphi_s - \varphi_e)}$

$\underline{u_s} = \underline{Z_C}\,\underline{i}$

$\underline{u_e} = (\underline{Z_R} + \underline{Z_C})\underline{i}$ $\Big\{ \underline{H} = \dfrac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = \dfrac{\underline{Z_C}\,\underline{i}}{\underline{Z_R}+\underline{Z_C}} = \dfrac{\underline{Z_C}}{\underline{Z_R}+\underline{Z_C}}$ pont diviseur de tension

$\underline{H} = \dfrac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + R} \Rightarrow \boxed{\underline{H} = \dfrac{1}{1+jRC\omega}}$ (1)

pulsation particulière $\omega_0 = \dfrac{1}{RC} \Rightarrow \boxed{\underline{H} = \dfrac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}}$ (2)

Rq1 : $|\underline{H}| = \dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$ 1 et $\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$ ont la m unité, donc $\frac{\omega}{\omega_0}$ est sans unité

Rq2 : Obtention de l'equa diff

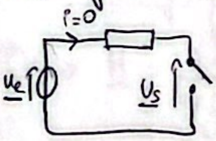
$\underline{H} = \dfrac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = \dfrac{1}{1+jRC\omega}$ ← (1)

$\Rightarrow \underline{u_s}(1+jRC\omega) = \underline{u_e}$

$\Rightarrow u_s + RC\dfrac{du_s}{dt} = u_e$

Rq3 : schémas équivalents :

- BF : $f \to 0$ $\omega = 2\pi f \to 0 \Rightarrow$ C ∼ interr. ouvert



$\underline{i} = 0 \Rightarrow \underline{u_R} = 0.$

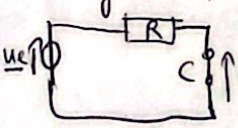
$\Rightarrow \underline{u_s} = \underline{u_e}$ (eq maille)

$\Rightarrow \underline{H} = \dfrac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = 1.$

$|\underline{H}| = 1$, $G = 20\log(\underline{H}) = 20\log(1) = 0.$

~~Phase~~ $\varphi = \arg(\underline{H}) = \arg(1) = 0$.

- HF : $f \to +\infty$, $\omega = 2\pi f \to +\infty \Rightarrow$ C ∼ fil.



$\underline{H} = \dfrac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = 0$ $|\underline{H}| = 0$.

$\Big\{ G = 20\log(\underline{H}) \to -\infty$
φ indéterminable

b) étude fréquentielle avec les équivalents complexes

(2) : $\underline{H} = \dfrac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$

- à BF : $f \to 0$, $\omega = 2\pi f \to 0$: $\omega \ll \omega_0$, $\frac{\omega}{\omega_0} \lll 1$ négligeable

$\Rightarrow 1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0} \simeq 1 \Rightarrow \underline{H} \simeq \dfrac{1}{1}$ $|\underline{H}| \simeq 1$

$G = 20\log(\underline{H}) \simeq 0$

Asymptote pour le gain : $y = 0$ à BF

$\varphi = \arg(\underline{H}) \simeq \arg(1) \Rightarrow \underline{\varphi \simeq 0}$.

Asymptote pour la phase : $y_\varphi = 0$ à BF

- à HF : $f \to +\infty$, $\omega = 2\pi f \to +\infty$: $\omega \gg \omega_0$, $\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1$

$\Rightarrow 1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0} \simeq j\dfrac{\omega}{\omega_0} \Rightarrow \underline{H} \simeq \dfrac{1}{j\frac{\omega}{\omega_0}}$

$|\underline{H}| \simeq \dfrac{1}{\frac{\omega}{\omega_0}} \simeq \dfrac{\omega_0}{\omega}$

$G = 20\log(|\underline{H}|) \simeq 20\log\left(\dfrac{\omega_0}{\omega}\right)$

$\Rightarrow G \simeq 20\log\omega_0 - 20\log\omega$

Asymptote : $\boxed{y = 20\log\omega_0 - 20\log\omega}$ pour le gain à HF

Si on prend en abscisse (x) $\log\omega$, on obtient une droite de pente (-20) qui passe par le point $A(\omega = \omega_0 ; y = 0)$

Rq : unité de la pente (savoir juste l'unité : dB/déc)

Pour 1 décade :

$y(10\omega) - y(\omega) = [20\log\omega_0 - 20\log(10\omega)] - [20\log\omega_0 - 20\log\omega]$

$= -20\log(10\omega) + 20\log(\omega)$

$= 20\log\left(\dfrac{\omega}{10\omega}\right)$

$y(10\omega) - y(\omega) = -20\log(10) = -20\,\mathrm{dB}.$

Quand la pulsation augmente d'une décade (×10), l'ordonnée sur l'asymptote diminue de 20

4 :

$\varphi = \arg(\underline{H}) \simeq \arg\left(\frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_0}}\right)$ d'après ③

$\varphi = \arg(1) - \arg\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)$

$\varphi = -\frac{\pi}{2}$

Asymptote : $y_\varphi = -\frac{\pi}{2}$ à HF

Rq : Comportement intégrateur ou dérivateur (importante)

HF : $\underline{H} \simeq \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_0}}$

$\underline{H} = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} \simeq \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_0}} \Rightarrow \underline{u_s}\, j\frac{\omega}{\omega_0} \simeq \underline{u_e}$

$\Rightarrow \underline{u_s} \simeq \omega_0 \frac{\underline{u_e}}{j\omega}$

$\rightarrow u_s \simeq \omega_0 \int u_e(t)\,dt$

Comportement intégrateur à HF :

En sortie, aux bornes de u_c, on obtient une primitive du signal.

• Point particulier : $\omega = \omega_0$

② $\rightarrow \underline{H} = \frac{1}{1+j} \Rightarrow |\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$G = 20\log(|\underline{H}|) \Rightarrow G = 20\log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$G = -20 \times \frac{1}{2}\log(2)$

$G = -10\log(2) = -3\,dB$.

$\varphi = \arg(\underline{H}) = \arg(1) - \arg(1+j) = -\frac{\pi}{4}$

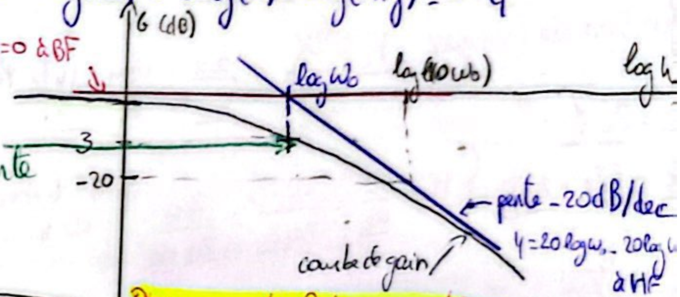


Diagramme de Bode asymptotique de gain = DBA de gain

or $|\underline{H}| = \frac{U_{sm}}{U_{em}} \Rightarrow U_{sm} \simeq U_{em}$

$\varphi \rightarrow 0$

échelle semi-logarithmique

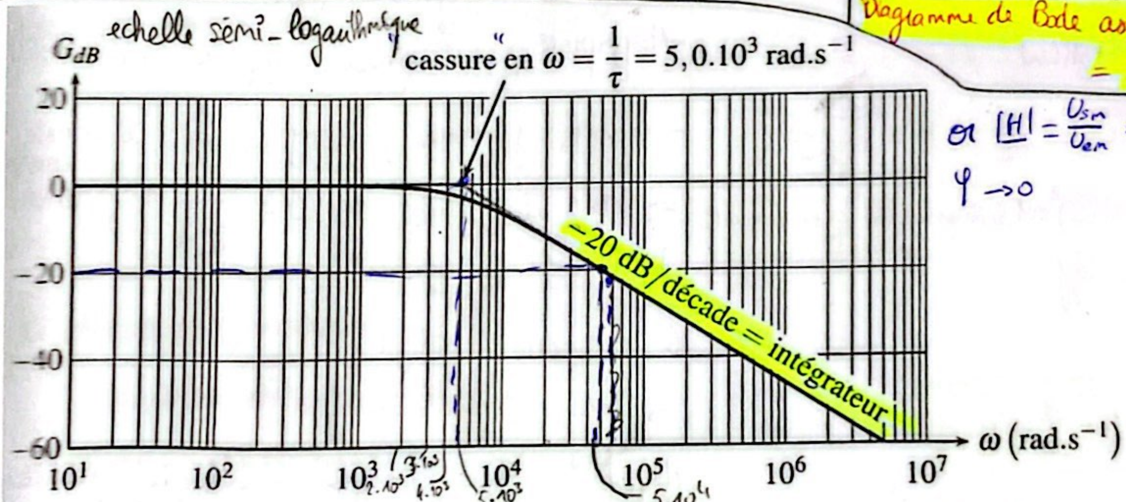


Figure 11.4 – Gain d'un passe-bas du premier ordre dans le cas où $\tau = 2,0.10^{-4}$ s (les asymptotes sont en gris).

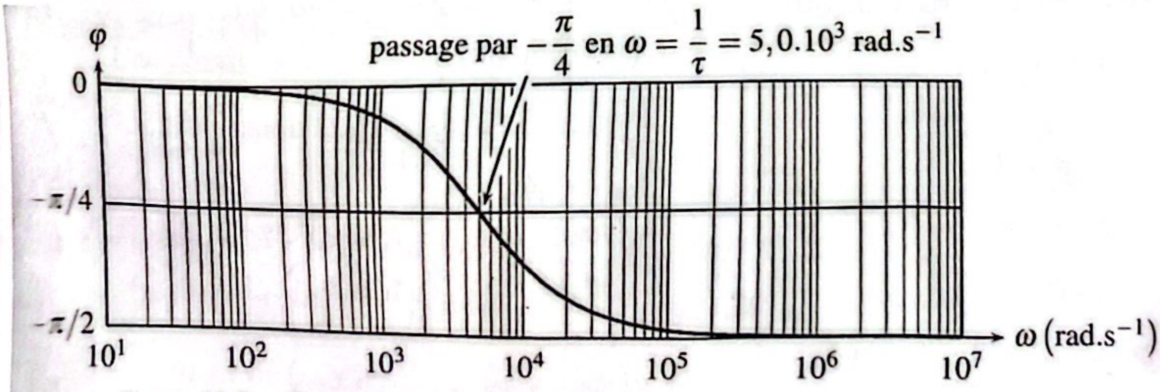
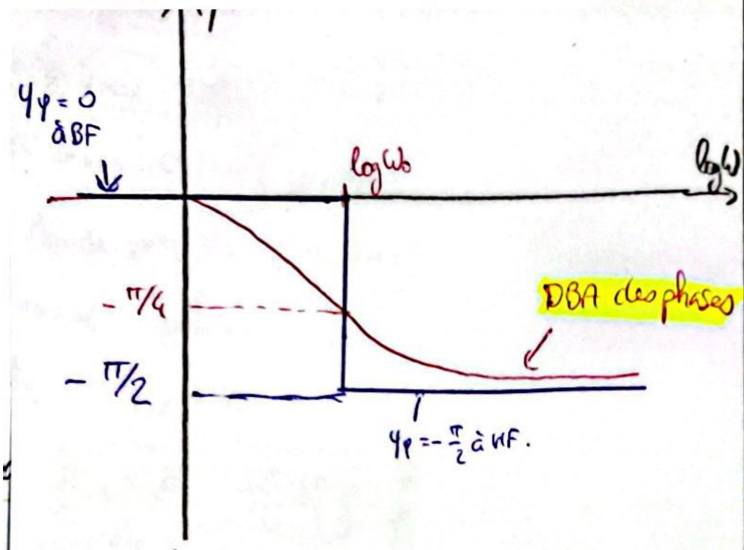


Figure 11.5 – Phase d'un passe-bas du premier ordre dans le cas où $\tau = 2,0.10^{-4}$ s.



Rq importante : Calcul de la borne passante

* Intervalle de pulsation au laquel $|\underline{H}| \geqslant \frac{H_{max}}{\sqrt{2}}$

$G = 20\log(|\underline{H}|)$

$\Rightarrow 20\log(|\underline{H}|) \geqslant 20\log\left(\frac{H_{max}}{\sqrt{2}}\right)$

$\Rightarrow G \geqslant 20\log(H_{max}) - 20\log(\sqrt{2})$.

où $G_{max} = 20\log(H_{max})$.

$\Rightarrow G \geqslant G_{max} - 3$ dB.

* Pulsation de coupure : tq $|\underline{H}| = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}}$ — limite de la borne passante

$\Leftrightarrow G = G_{max} - 3$ dB.

Ici, $G_{max} = 0$, $\Leftrightarrow H_{max} = 1$.

trouvons ω_c tq $G = -3dB \Leftrightarrow |\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \omega_c = \omega_0$

Bande passante (tq $G \geqslant -3dB$) : $]0, \omega_0]$

suite p4

c) analyse des courbes : (p4).

* à BF : $\omega \to 0$, $\log\omega \to -\infty$, $G \to 0$, $|\underline{H}| \to 1$

or $|\underline{H}| = \frac{U_{sm}}{U_{em}} \to 1 \Rightarrow U_{sm} \simeq U_{em}$.

$\varphi \to 0$ donc $\varphi = \varphi_s - \varphi_e \to 0 \Rightarrow \varphi_s \simeq \varphi_e$.

Pas d'influence : le filtre laisse passer le signal à BF.

* à HF : $\omega \to +\infty$, $\log\omega \to +\infty$, $G \to -\infty$, $|\underline{H}| \to 0$.

$\Rightarrow U_{sm} \simeq 0$.

$\varphi \to -\frac{\pi}{2}$, $\varphi_s - \varphi_e \simeq -\frac{\pi}{2}$

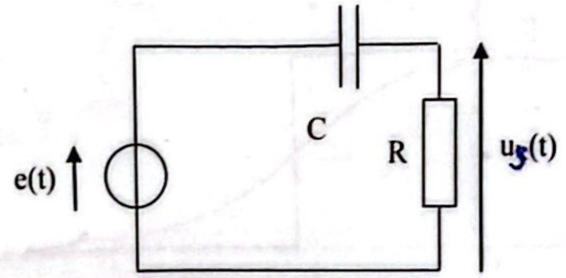
donc $s(t)$ est en quadrature retard sur $e(t)$

à HF, $u_s(t) \simeq 0$, Atténuation du signal de sortie

+ comportement intégrateur sur l'asymptote :

$\Rightarrow$ Filtre passe bas.

2) Circuit RC série sortie sur R.



a) Etude préliminaire

$$\underline{H} = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = \frac{Z_R}{Z_C + Z_R} = \frac{R}{R + \frac{1}{jwC}}$$

$$= \frac{Rjwc}{1 + jRwc} \quad ① \quad \text{où } \omega_0 = \frac{1}{RC}.$$

$$\underline{H} = \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \quad ②$$

Rq1 : obtention de l'equa diff :

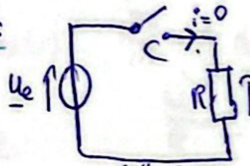
$$\underline{H} = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = \frac{Rjwc}{1 + jRwc}$$

$$\Rightarrow \underline{u_s}(1 + jRwc) = \underline{u_e}\, Rjwc$$

$$\Rightarrow u_s + RC\frac{du_s}{dt} = RC\frac{du_e}{dt}$$

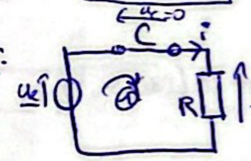
Rq2 : schémas équivalents :

à BF :



$\Rightarrow \begin{cases} \underline{H} = 0 \\ G \to -\infty \\ \varphi\ ? \end{cases}$

à HF :



$\Rightarrow \begin{cases} \underline{H} = 1 \\ G = 0 \\ \varphi = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Filtre passe haut (laisse passer les HF, atténue les BF)

b) étude fréquentielle

$$② \to \underline{H} = \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

à BF : $\omega \to 0$ ($f \to 0$), $\omega \ll \omega_0$ donc $\frac{\omega}{\omega_0} \ll 1$

$$\Rightarrow 1 + j\frac{\omega}{\omega_0} \simeq 1 \Rightarrow \underline{H} \simeq \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1}$$

$$\Rightarrow \underline{H} \simeq j\frac{\omega}{\omega_0} \quad ③ \quad \Rightarrow |\underline{H}| \simeq \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$G \simeq 20\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \Rightarrow G \simeq 20\log\omega - 20\log\omega_0$$

Asymptote : $y = 20\log\omega - 20\log\omega_0$

Droite qui passe par $A(\omega = \omega_0\ ;\ y = 0)$ de pente +20 dB/dec

$$\varphi = \arg(\underline{H}) \Rightarrow \varphi \simeq \arg\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right) \Rightarrow \varphi \simeq \frac{\pi}{2}.$$

Rq : $③ \to \underline{H} = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} \simeq j\frac{\omega}{\omega_0}$

$$\Rightarrow \underline{u_s} \simeq \frac{1}{\omega_0} j\omega \underline{u_e} \Rightarrow u_s = \frac{1}{\omega_0}\frac{du_e(t)}{dt}$$

donc comportement dérivateur à BF.

. à HF : $\omega \to +\infty$, $\log\omega \to +\infty \Rightarrow \omega_0 \gg \omega$ donc $\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1$

$$1 + j\frac{\omega}{\omega_0} \simeq j\frac{\omega}{\omega_0} \overset{③}{\Rightarrow} \underline{H} \simeq \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{j\frac{\omega}{\omega_0}} \Rightarrow \underline{H} \simeq 1$$

$$|\underline{H}| \simeq 1 \Rightarrow G = 20\log(\underline{H}) = 20\log 1 \Rightarrow G \simeq 0$$

Asymptote $y = 0$ à HF

$\varphi = \arg(\underline{H}) \simeq \arg(1) \Rightarrow \varphi \simeq 0$ asymptote $y_\varphi = 0$

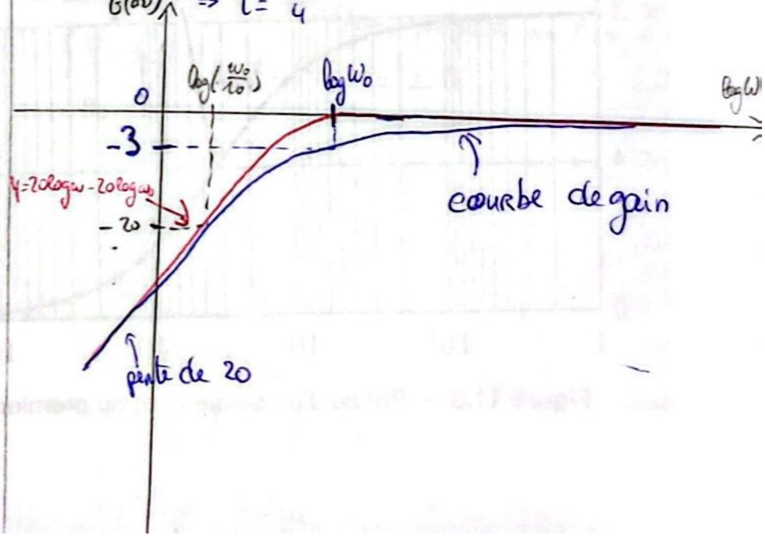
• Point particulier : $\omega = \omega_0$ $\quad \underline{H} = \frac{j}{1+j}$

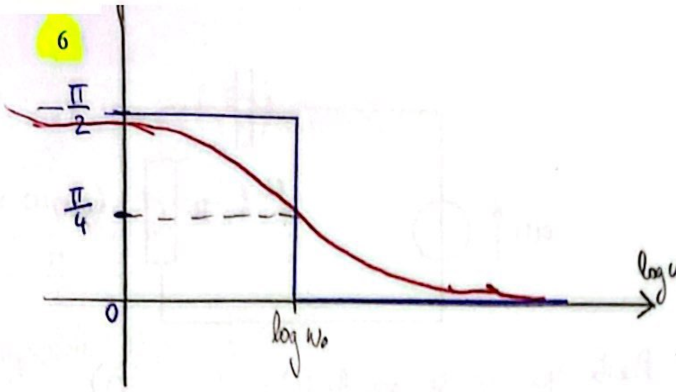
$$|\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad G = 20\log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -20\log\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow G = -10\log 2, \quad G \simeq -3\ \text{dB}$$

$$\varphi = \arg(\underline{H}) = \arg(j) - \arg(1+j) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$$





c) analyse des courbes

- à BF : $G<0$, $|\underline{H}| < 1$ $|\underline{H}| = \frac{U_{sm}}{U_{em}} \Rightarrow U_{sm} < U_{em}$
  $\varphi \to \frac{\pi}{2}$

Le signal de sortie est atténué et déphasé (en quadrature avance sur le signal d'entrée)
Il est en + dérivé (démo)

- à HF : $G \to 0$ $|\underline{H}| \simeq 1$ $U_{sm} \simeq U_{em}$
  $\varphi \to 0$ $\varphi_s \simeq \varphi_e$

→ Pas d'influence du filtre

⇒ Filtre passe haut, laisser passer le signal à HF et l'atténue à BF.

suite feuille blanche ②

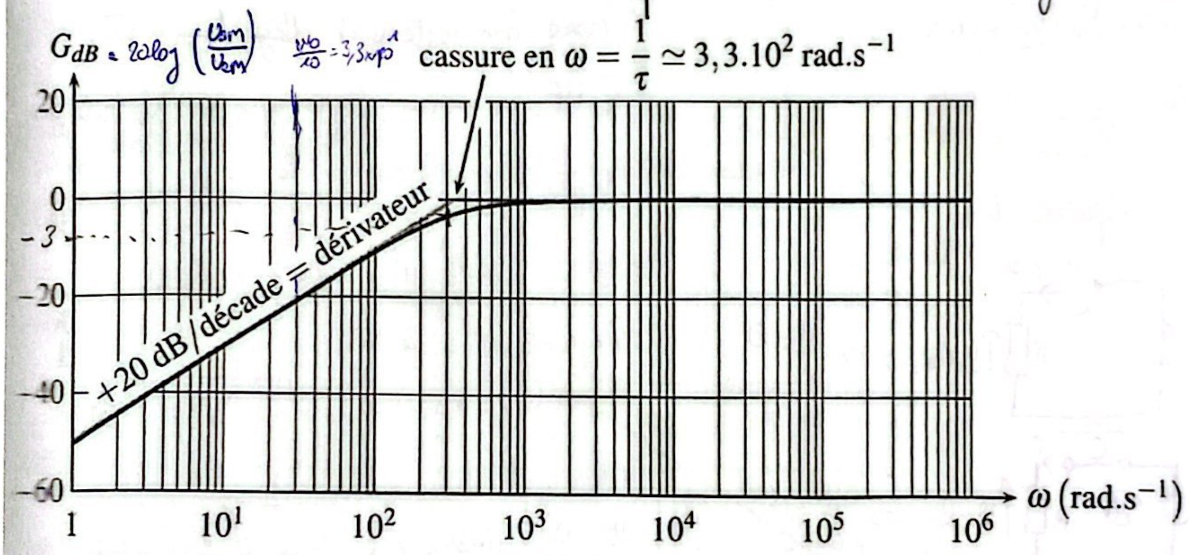


Figure 11.7 – Gain d'un passe-haut du premier ordre dans le cas où $\tau = 3{,}0.10^{-3}$ s (les asymptotes sont en gris).

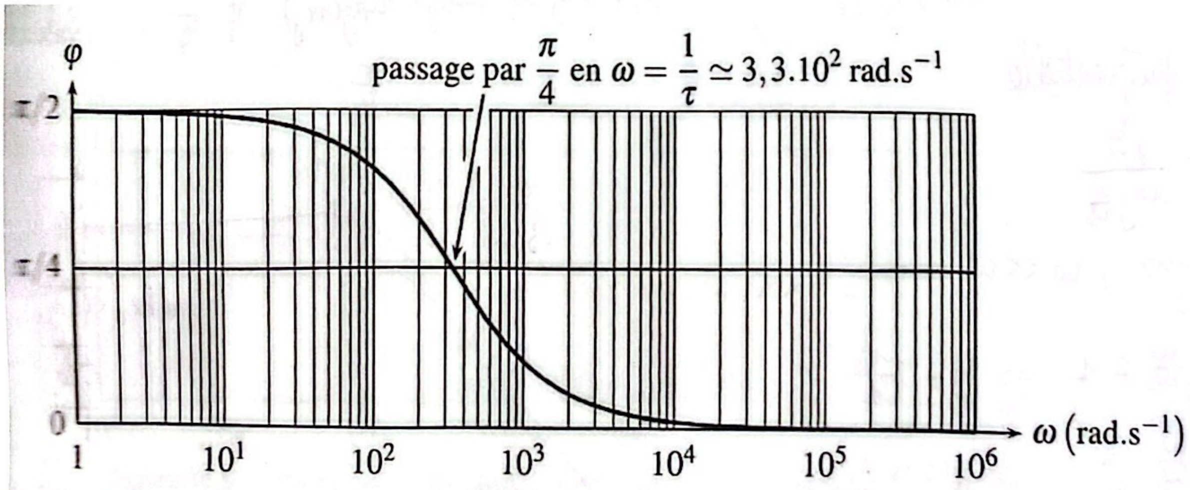


Figure 11.8 – Phase d'un passe-haut du premier ordre dans le cas où $\tau = 3{,}0.10^{-3}$ s.

Bande passante:

$\boxed{G \geq G_{max} - 3dB}$

Ici $G_{max} = 0 \Rightarrow G \geq -3dB$

$\Rightarrow$ Bande passante : $[\omega_0, +\infty[$

où $\omega_0 = \omega_c$ pulsation de coupure

tq $G = G_{max} - 3dB$

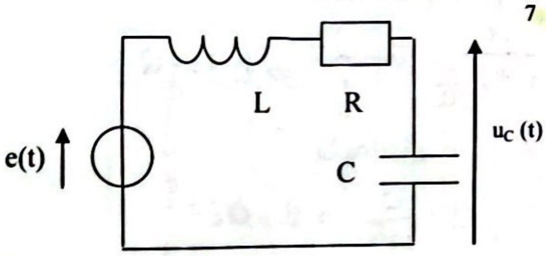
Rq : $\boxed{\varphi = \omega \Delta t = \frac{2\pi}{T} \Delta t}$ ★★★

$\Rightarrow \Delta t = \frac{T\varphi}{2\pi}$ $\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \Delta t = \frac{T}{2\pi} \times \frac{\pi}{2} = \frac{T}{4}$

III Etude détaillée de filtres du second ordre

1) Circuit RLC série sortie sur C.



$\underline{H} = \frac{\underline{U_s}}{\underline{U_e}} = \frac{\underline{Z_C}}{\underline{Z_C}+\underline{Z_R}+\underline{Z_L}}$ Pont diviseur de tension

$$\boxed{\underline{H} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{jL\omega + R + \frac{1}{jC\omega}}} \quad (1)$$

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jRC\omega - \omega^2 LC}$$

Rq1 : Equation différentielle

$$\underline{H} = \frac{\underline{U_s}}{\underline{U_e}} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{jL\omega + R + \frac{1}{jC\omega}}$$

$\Rightarrow \underline{U_e} \times \frac{1}{jC\omega} = \underline{U_s}\left(jL\omega + R + \frac{1}{jC\omega}\right)$

$\Rightarrow \frac{1}{C}\int u_e(t) = L\frac{du_s}{dt} + R u_s + \frac{1}{C}\int u_s(t)$

$\Rightarrow \frac{1}{LC}u_e(t) = \frac{d^2u_s}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_s}{dt} + \frac{1}{LC}u_s(t)$

$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ $\qquad \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L} \Rightarrow Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{\omega_0}{RC}$

$$\underline{H} = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\underbrace{RC\omega_0}_{\frac{1}{Q}}\frac{\omega}{\omega_0}}$$

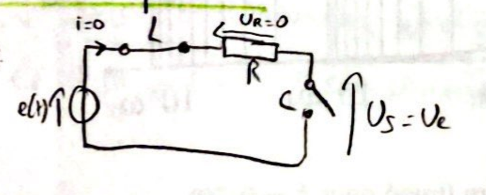
$Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{L\omega_0^2}{R\omega_0} = \frac{L}{R\omega_0} \times \frac{1}{LC} = \frac{1}{RC\omega_0}$

$\underline{H} = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}$, $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ pulsation réduite

$$\Rightarrow \boxed{\underline{H} = \frac{1}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}} \quad (2)$$

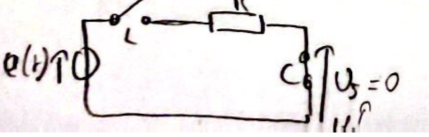
Rq2 : Schémas équivalents

à BF :



$\underline{U_s} = \underline{U_e}$
$\underline{H} = 1$
$G = 0$
$\varphi = 0$

à HF :



$\underline{U_s} = 0$
$\underline{H} = 0$
$G \to -\infty$
φ ?

b) étude fréquentielle :

(2) $\rightarrow \underline{H} = \frac{1}{1-x^2+j\frac{x}{Q}}$ où $x = \frac{\omega}{\omega_0}$

- **à BF** : $\omega \to 0$ $\log\omega \to -\infty$, $\omega \ll \omega_0 \Rightarrow x = \frac{\omega}{\omega_0} \ll 1$

$f \to 0$

$x \to 0$

$1 - x^2 + j\frac{x}{Q} \simeq 1$ (polynôme ≃ égal terme de + bas degré quand $x \to 0$)

$\underline{H} \simeq 1 \Rightarrow |\underline{H}| = 1$

$G = 20\log(|\underline{H}|) \simeq 0$ $\boxed{y = 0}$

$\varphi = \arg(\underline{H}) \simeq \arg(1) \simeq 0 \Rightarrow \boxed{y_\varphi = 0}$

- **à HF** : $\omega \to +\infty$, $x \to +\infty$ $\log\omega \to +\infty$, $\omega \gg \omega_0$, $x = \frac{\omega}{\omega_0} \gg 1$

$1 - x^2 + j\frac{x}{Q} = -x^2$ $\quad x^2 \gg \frac{x}{Q}$

(polynôme ≃ terme de + gd degré qd $x \to +\infty$)

$\underline{H} \simeq \frac{1}{-x^2}$ $\quad \underline{H} \simeq -\frac{1}{x^2}$ $\quad |\underline{H}| \simeq \frac{1}{x^2}$

$G = 20\log(|\underline{H}|) \simeq 20\log\left(\frac{1}{x^2}\right) \simeq -40\log(x)$

$y = -40\log x$, droite de pente -40 dB/dec qui passe par $B(x=1, y=0)$

Rq : $x = \frac{\omega}{\omega_0} \Rightarrow y = -40\log\omega + 40\log\omega_0$

droite de pente -40 dB/dec qui passe par $A(\omega=\omega_0, y=0)$

$\varphi = \arg(\underline{H}) = \arg\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \pm\pi$

Rq : $\underline{H} = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} \simeq -\frac{1}{x^2} \simeq \frac{1}{j^2x^2}$

or $x = \frac{\omega_0}{\omega}$, $\underline{H} = \frac{\underline{U_s}}{\underline{U_e}} = \frac{\omega_0^2}{j^2\omega^2}$

$\Rightarrow \underline{U_s} = \omega_0^2 \frac{\underline{U_e}}{(j\omega)^2}$

↳ Double intégration : $\underline{u_e}$ est intégré 2x de suite :

$(\underline{u_s}(j\omega)^2 = \omega_0^2 \underline{u_e})$

$\Rightarrow \frac{d^2u_s}{dt^2} = \omega_0^2 \underline{u_e}$

• point particulier : $\omega = \omega_0$, $x = 1$

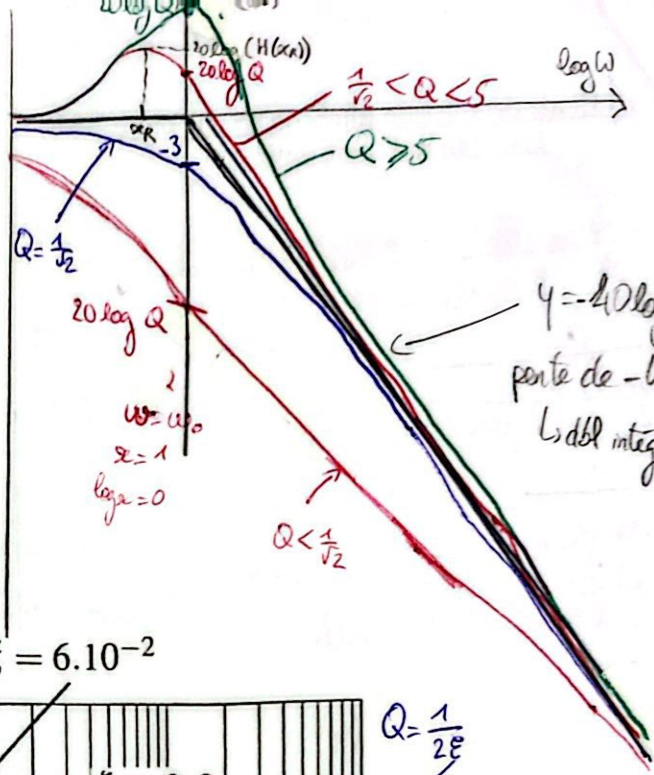
8

$$\underline{H} = \frac{1}{1-1+j\frac{1}{Q}} = \frac{Q}{j} \Rightarrow \underline{H} = -jQ$$

$$|\underline{H}| = Q \quad , \quad G = 20 \log Q$$

$$j = e^{j\frac{\pi}{2}} \quad , \quad \underline{H} = \frac{Q}{e^{j\frac{\pi}{2}}} \Rightarrow \underline{H} = Q e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$\varphi = \arg(\underline{H}) = -\frac{\pi}{2}$$



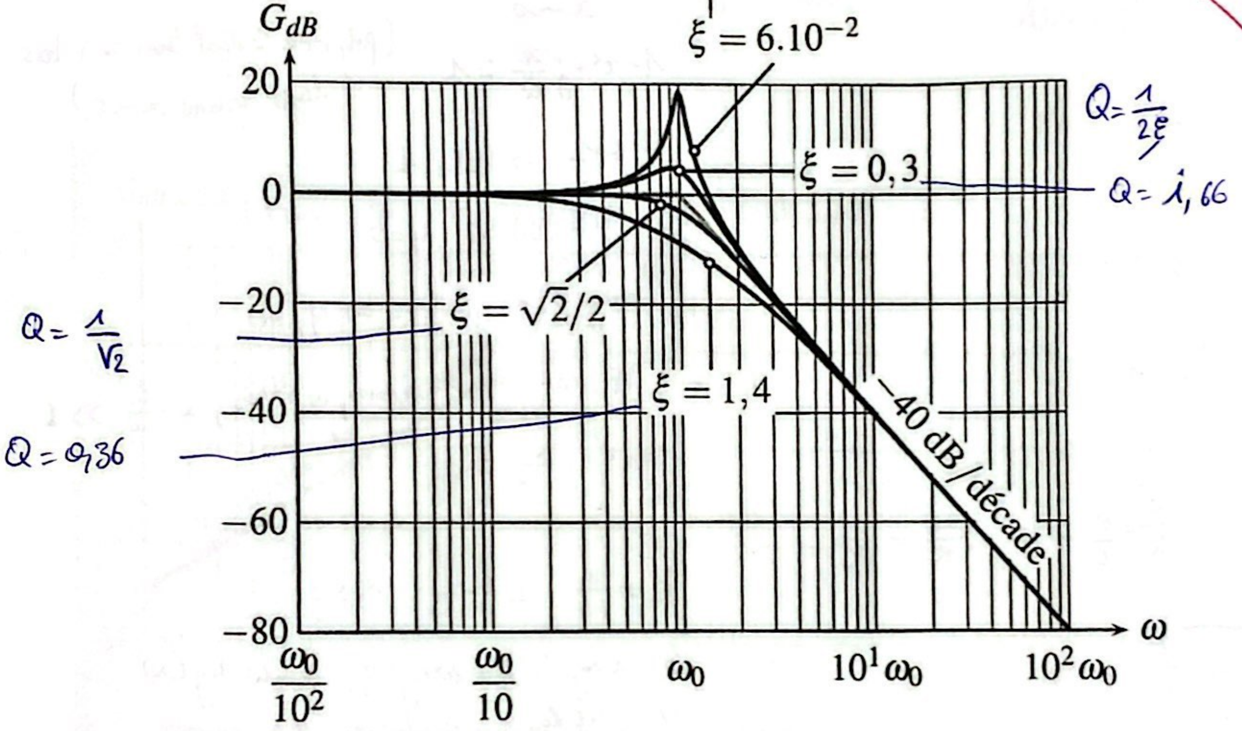


Figure 11.16 – Gain d'un passe-bas du deuxième ordre (les asymptotes sont en gris).

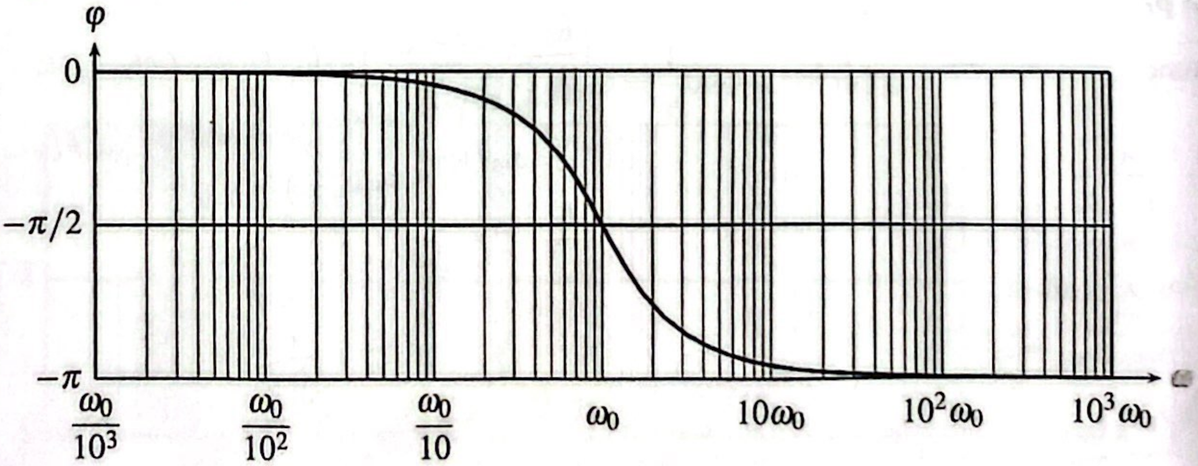
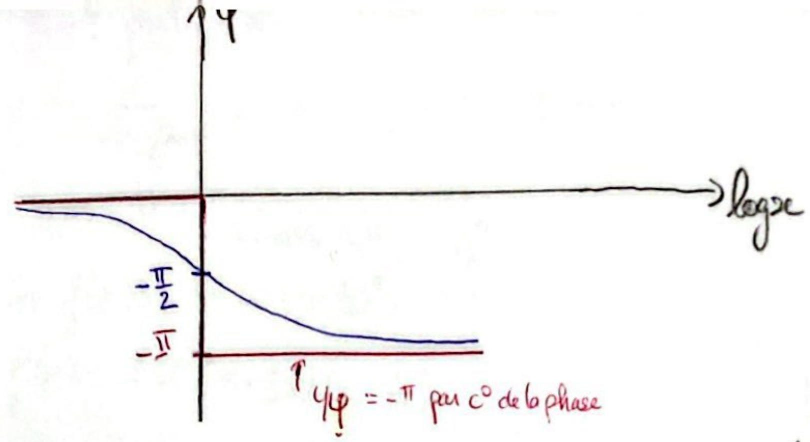


Figure 11.15 – Phase d'un passe-bas du deuxième ordre (tracé pour $\xi = 0,70$).



Rq : Etude du max : (courbe rouge haute)

$$|\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$$

$$f(x) = (1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2} \rightarrow |\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$$

$$f(X) = (1-X)^2 + \frac{X}{Q^2} \quad \text{où } X = x^2$$

$$f'(X) = -2(1-X) + \frac{1}{Q^2}$$

$$f'(X) = 0 \iff -2(1-X) + \frac{1}{Q^2} = 0.$$

$$\iff 2(1-X) = \frac{1}{Q^2}$$

$$\iff 1-X = \frac{1}{2Q^2}$$

$$\iff X = 1 - \frac{1}{2Q^2}$$

$$X > 0 \iff 1 - \frac{1}{2Q^2} > 0$$

$$\iff \frac{1}{2Q^2} < 1.$$

$$\iff Q^2 > \frac{1}{2}$$

$$\iff Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

*

C) étude des courbes :

à BF : $G \to 0$ Pas d'effet sur le signal
$\varphi \to 0$ $u_s \simeq u_e$

à HF : $G < 0$ le signal est atténué et déphasé
$\varphi \to -\pi$ (opposition de phase)
+ double intégration

Filtre passe-bas avec résonance (amplification) en ω_R, pour $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$

*:

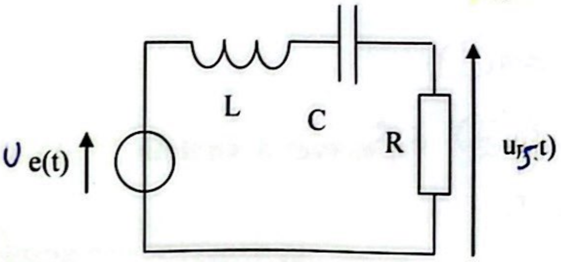
$$x_R = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} < 1$$

existe si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$

$f(x_R) \Rightarrow H(x_R) = \frac{1}{\sqrt{f(x_R)}} = \frac{2Q^2}{\sqrt{4Q^2-1}}$ à retrouver

$$x_R = \frac{\omega_R}{\omega_0} < 1 \Rightarrow \omega_R < \omega_0$$

2) Circuit RLC série sortie sur R.



a) étude préliminaire

Pont diviseur de tension

$$\boxed{\underline{H} = \frac{U_s}{U_e} = \frac{R}{R+jL\omega+\frac{1}{jC\omega}}} = \quad (1)$$

$$\underline{H} = \frac{1}{1+j\left(\frac{L\omega}{R}-\frac{1}{RC\omega}\right)}$$

On fait apparaître $x = \frac{\omega}{\omega_0}$

$$\underline{H} = \frac{1}{1+j\left(\frac{L\omega_0}{R}\times\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{1}{RC\omega_0}\times\frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

$$\underline{H} = \frac{1}{1+j\left(\frac{L\omega_0}{R}x-\frac{1}{RC\omega_0}\times\frac{1}{x}\right)}$$

On pose $\boxed{Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}}$ (a)

à savoir retrouver
↳ passer par equa diff
Rq1

Alors, $\boxed{\underline{H} = \frac{1}{1+jQ\left(x-\frac{1}{x}\right)}}$ (2)

(a) $\Rightarrow \frac{L}{R}\omega_0 = \frac{1}{RC\omega_0}$

$\Rightarrow \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$\Rightarrow Q = \frac{L}{R}\times\frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow Q =$

Rq1: obtenir l'équa diff

(1) $\Rightarrow \frac{U_s}{U_e} = \frac{R}{R+jL\omega+\frac{1}{jC\omega}}$

→ on met sous forme canonique et on peut retrouver ω_0 et Q (caractéristiques du circuit RLC)

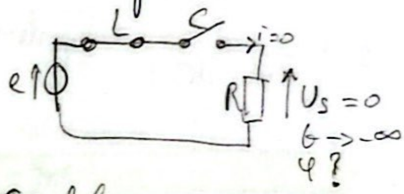
Rq2: schémas équivalents:

à BF: C ~ int ouvert, L ~ fil

$\omega \to 0$

$\underline{H} \to 0$

$\Rightarrow U_s \to 0$.

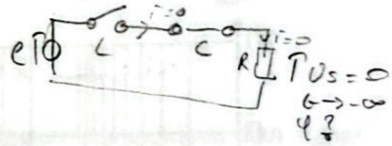


à HF: L ~ int ouvert, C ~ fil

$\omega \to +\infty$

$\underline{H} \to 0$

$\Rightarrow U_s \to 0$



démo des "~":

- $\underline{Z}_L = jL\omega = \frac{U_m}{I_m} \Rightarrow U_m = L\omega I_m$

$\omega \to 0$, $U_m \to 0$ $\forall I_m$, L ~ fil

$\omega \to +\infty$, $I_m \to 0$ $\forall U_m$, L ~ int. ouvert.

- $\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega} = \frac{U_m}{I_m} \Rightarrow I_m = C\omega U_m$.

$\omega \to 0$, $I_m \to 0$ $\forall U_m$, C ~ int ouvert.

$\omega \to +\infty$, $U_m \to 0$ $\forall I_m$, C ~ fil

b) Étude fréquentielle

$$\underline{H} = \frac{1}{1+jQ\left(x-\frac{1}{x}\right)}$$

à BF: $\omega \to 0$, $x = \frac{\omega}{\omega_0} \to 0$ donc $x \ll 1$.

$\Rightarrow \frac{1}{x} \to +\infty$.

$\Rightarrow x - \frac{1}{x} \simeq -\frac{1}{x}$

$\Rightarrow 1+jQ\left(x-\frac{1}{x}\right) \simeq 1 - j\frac{Q}{x}$

de même $\frac{Q}{x} \gg 1$

donc $1 - j\frac{Q}{x} \simeq -j\frac{Q}{x}$

$\Rightarrow \underline{H} \simeq \frac{1}{-j\frac{Q}{x}} \simeq j\frac{x}{Q}$

$\Rightarrow |\underline{H}| \simeq \frac{x}{Q}$.

$G = 20\log\left(\frac{x}{Q}\right) = 20\log x - 20\log Q$.

$\boxed{y = 20\log x - 20\log Q}$ asymptote BF de gain

$\varphi = \arg(\underline{H})$

$\varphi \simeq (j\frac{x}{Q}) \in i\mathbb{R}$

$\varphi \simeq \frac{\pi}{2}$

Rq 3 : $\underline{H} = \frac{\underline{U_s}}{\underline{U_e}} \simeq j\frac{x}{Q}$

$\Rightarrow \underline{U_s} \simeq j\frac{\omega}{\omega_0} \times \frac{1}{Q}\underline{u_e}$

$\Rightarrow \boxed{\underline{U_s} \simeq \frac{1}{\omega_0 Q}\frac{d\underline{u_e}}{dt}}$ comportement dérivateur

$-\frac{1}{x} \to 0$

$x - \frac{1}{x} \simeq x$.

$1 + jQx \simeq jQx$ car $x \gg 1$.

$\underline{H} \simeq \frac{1}{jQx} \simeq -j\frac{1}{Qx}$

$|\underline{H}| = \frac{1}{Qx} \Rightarrow G = 20\log\left(\frac{1}{Qx}\right)$

$\Rightarrow G = -20\log(Qx) = -20\log x - 20\log Q$

$G = -20\log x - 20\log Q$ asymptote à HF : $\begin{cases} \text{pente : } -20 \text{ dB/dec} \\ \text{passant par } A(1\,;-20\log Q) \end{cases}$

$\varphi = \arg(\underline{H}) = \arg(-j\frac{1}{Qx}) \in i\mathbb{R}$

$\varphi = -\frac{\pi}{2}$

$\underline{H} = \frac{\underline{U_s}}{\underline{U_e}} \simeq -j\frac{1}{Qx} \Rightarrow \underline{U_s} = -j\frac{\omega}{\omega_0} \times \frac{\underline{U_e}}{Q}$

$\boxed{\underline{U_s} = -\frac{1}{\omega_0 Q}\frac{d\underline{u_e}}{dt}}$ comportement dérivateur

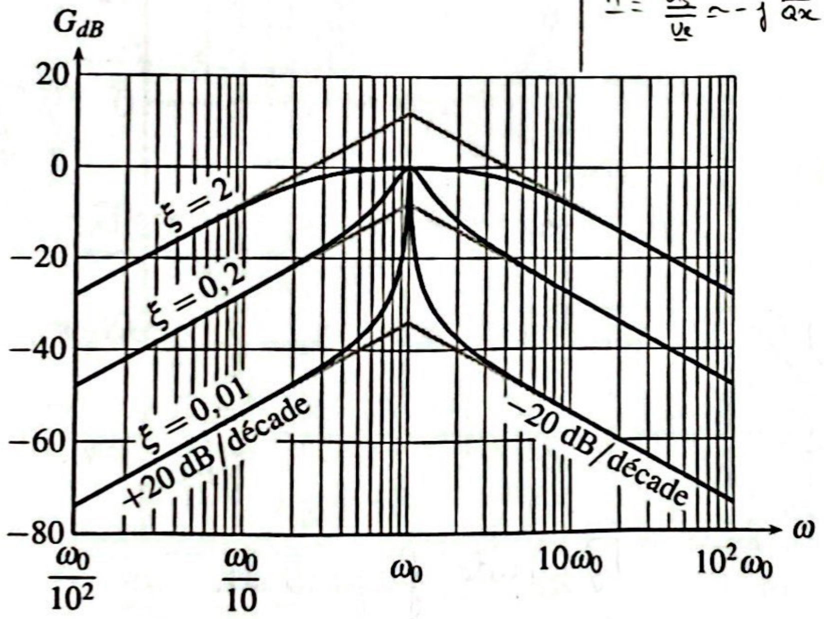


Figure 11.18 – Gain d'un passe-bande du deuxième ordre (les expressions aymptotiques sont en gris).

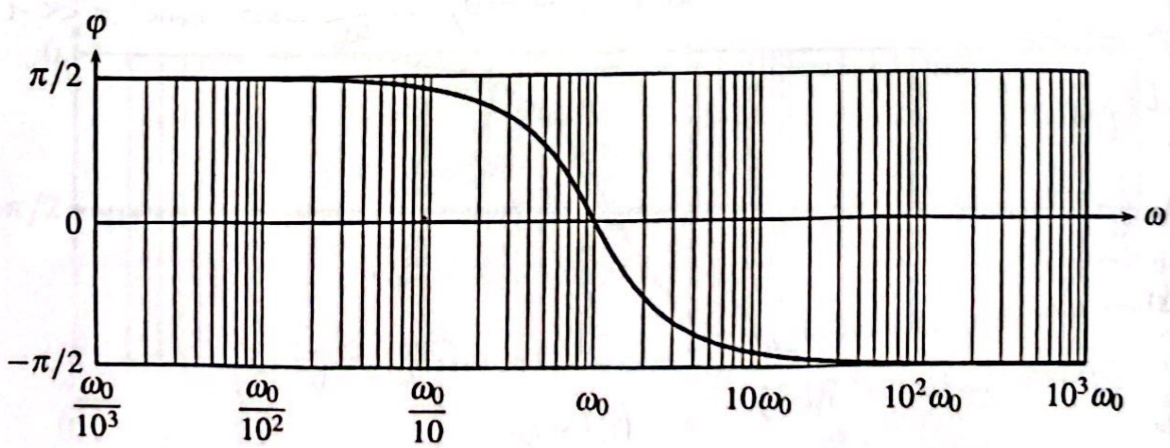


Figure 11.19 – Phase d'un passe-bande du deuxième ordre (tracé pour $\xi = 0,70$).

suite p10

Point particulier : $x=1$, $\omega=\omega_0$

$\underline{H} = \frac{1}{1+jQ\times 0} = 1$, $G=0$, $\varphi=0$.

Rq 2 : $|\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1+Q^2(x-\frac{1}{x})^2}} = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$

$\Rightarrow f(x) = 1+Q^2(x-\frac{1}{x})^2$

$f'(x) = 2Q^2(1+\frac{1}{x^2})(x-\frac{1}{x})$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x-\frac{1}{x}=0$

$\Leftrightarrow x^2-1=0$

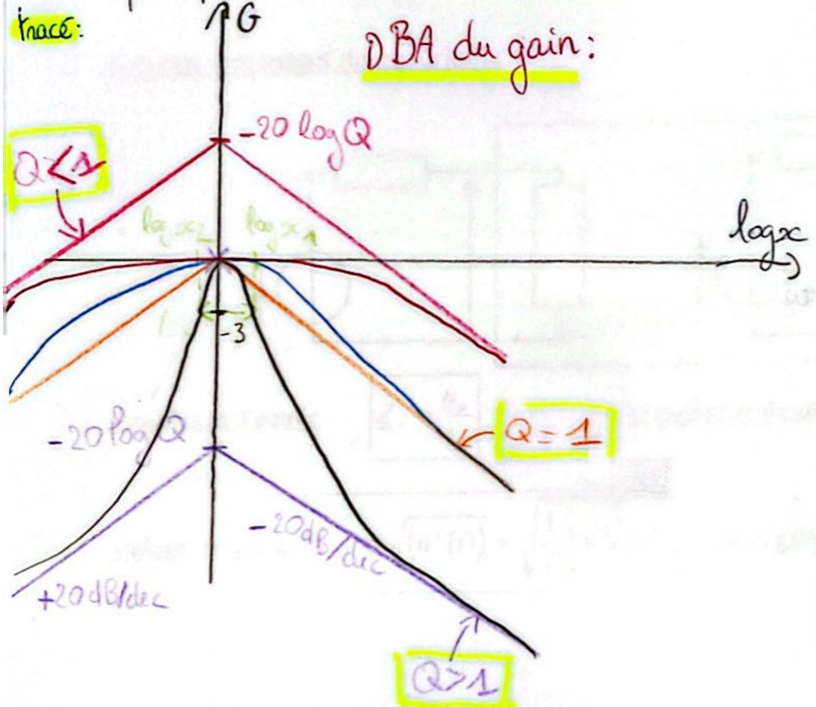
$\Leftrightarrow x=\pm 1$. or $x>0$

$\Leftrightarrow \omega=\omega_0$

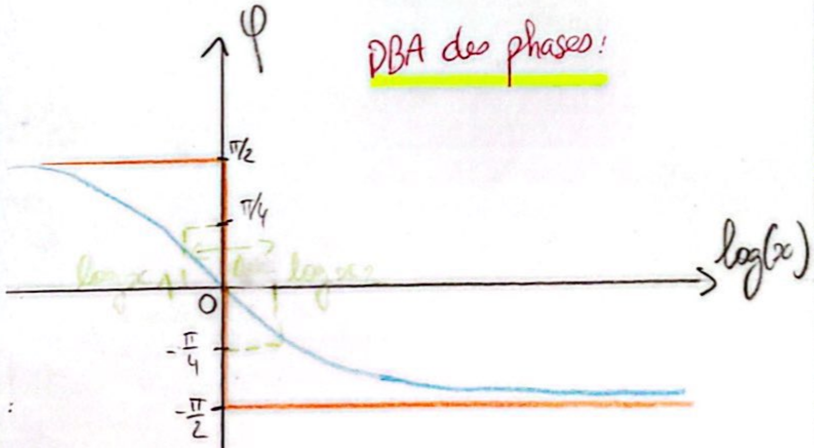
donc le point particulier est le maximum

tracé :

DBA du gain :



DBA des phases :



$\Rightarrow$ filtre passe bande

Rq : Calcul de la BP :

$G \geq G_{max} - 3dB$

$\Leftrightarrow |\underline{H}| \geq \frac{H_{max}}{\sqrt{2}}$

fréquences de coupure : $H = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+Q^2(x-\frac{1}{x})^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow 1+Q^2(x-\frac{1}{x})^2 = 2$.

$\Rightarrow (Q(x-\frac{1}{x}))^2 = 1$.

$\Rightarrow Q(x-\frac{1}{x}) = \pm 1$.

$\Rightarrow x-\frac{1}{x} = \pm\frac{1}{Q}$.

$\Rightarrow x^2 \pm \frac{1}{Q}x - 1 = 0$.

$\Delta = \frac{1}{Q^2}+4 = \frac{1+4Q^2}{Q^2}$

$x = \frac{\pm\frac{1}{Q} \pm \sqrt{\frac{1}{Q^2}+4}}{2}$

positives :

$x_1 = \frac{\frac{1}{Q}+\sqrt{\frac{1}{Q^2}+4}}{2}$ et $x_2 = \frac{-\frac{1}{Q}+\sqrt{\frac{1}{Q^2}+4}}{2}$

$\Delta x = \Delta\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$.

$\Rightarrow \Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$.

$\tan\varphi_D = Q(x-\frac{1}{x})$

pour x_1, x_2, $\tan\varphi_D = \pm 1 \Rightarrow \varphi_D = \pm\frac{\pi}{4}$.

c) étude des courbes

$Q = \frac{1}{2\xi}$ ***

$\xi = 2 \Rightarrow Q = 0{,}25$

$\xi = 0{,}2 \Rightarrow Q = 2{,}5$

$\xi = 0{,}01 \Rightarrow Q = 50$

$\Rightarrow$ filtre très sélectif, sélectionne une seule pulsation ω_0

En sortie, le signal est non nul seulement si sa pulsation est ω_0 (résonance aigüe à ω_0)

IV Filtrage d'un signal non sinusoïdal

1.) Théorème de Fourier

Un théorème mathématique important découvert au début du $XIX^{ème}$ siècle par le mathématicien et physicien français Joseph Fourier indique que :

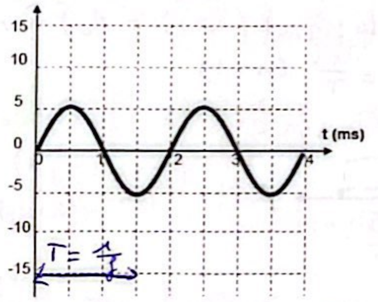
> Tout signal périodique de fréquence f_S et de forme quelconque peut se reconstituer par la superposition de signaux sinusoïdaux de fréquences multiples de f_S : 0, f_S, $2f_S$, ... , nf_S,... Il peut donc s'écrire sous la forme :
>
> $$s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n f_S t + \varphi_n)\,, \tag{2.2}$$
>
> où les A_n sont des constantes positives et les φ_n des constantes.

**
$$\boxed{s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \text{ où } \omega_n = n\,\omega_s \text{ et } \omega_s = 2\pi f_s}$$

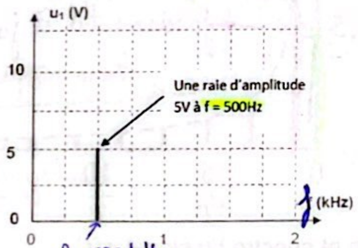
A_0 est la composante continue du signal, ou valeur moyenne ou offset.
A_1 est l'amplitude du signal fondamental de fréquence f_S.
Les A_n sont les amplitudes des harmoniques de fréquence $f_n = nf_S$ de rang $n \geq 2$.

Analyse spectrale : Opération qui consiste à déterminer la décomposition en signaux sinusoïdaux d'un signal donné.

Exemple 1 : $u1(t) = 5.\sin(2\pi.500.t)$ ne contient qu'une seule fréquence : f = 500 Hz T = 2 ms

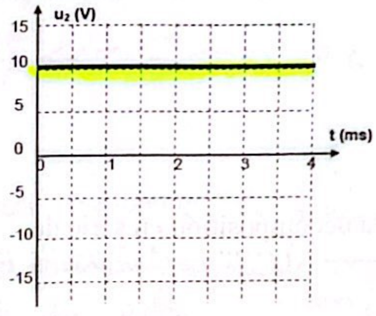


Spectre du signal

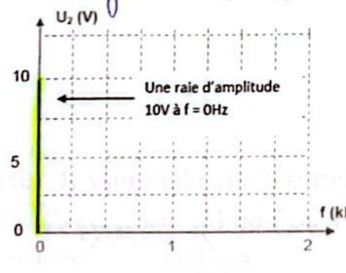


f = 500 kHz

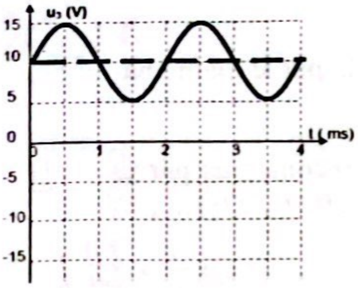
Exemple 2 : $u_2(t) = U_2 = 10V$



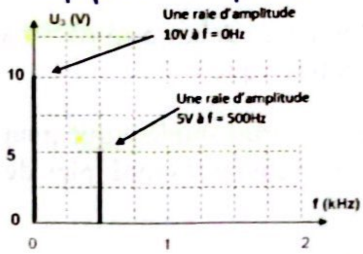
signal continue



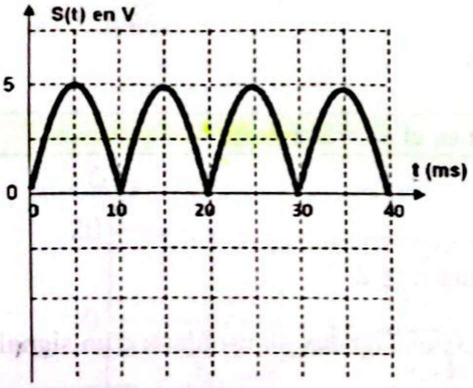
Exemple 3 : $u_3(t) = u_1(t) + u_2(t) = 10 + 5.\sin(2\pi .500.t)$



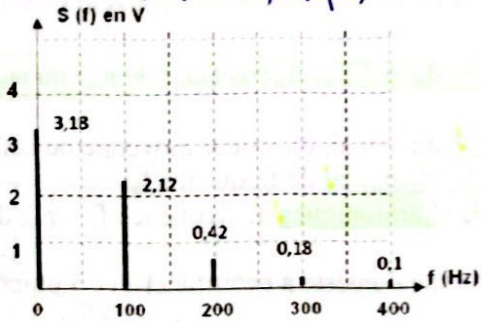
Superposition des spectres



Exemple 4 : Signal sinusoïdal redressé « double alternance » $f_0 = 50$ Hz



Analyse spectrale (à l'oscillo, latispro)



Exemple 5 : Signal carré

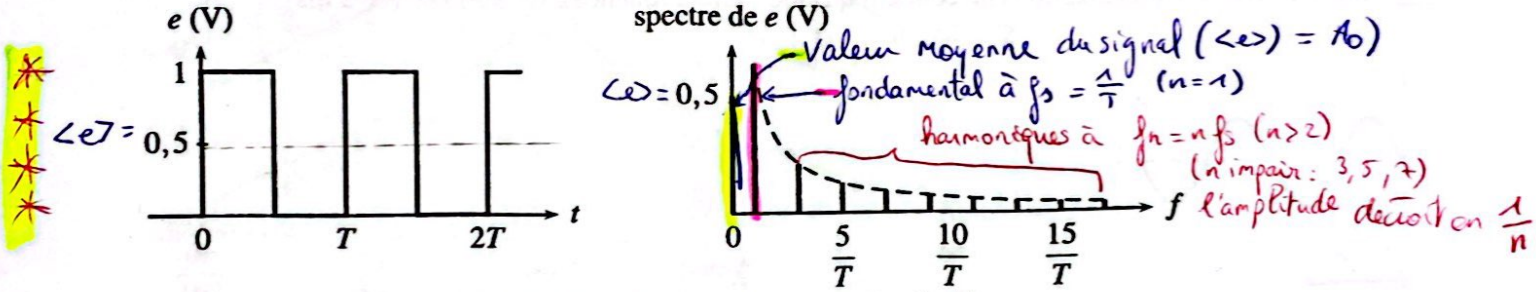


Figure 12.14 – Forme d'onde et spectre du signal $e(t)$.

Rq : Les harmoniques à hautes fréquences donnent les détails du signal

pas utile

Remarque : Conservation de la puissance

Pour une tension périodique u(t) mesurée aux bornes d'une résistance R, on a la décomposition en série de Fourier : $u(t) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n,eff}\sqrt{2}\cos(\omega_n t + \varphi_n)$ où $U_n = U_{n,eff}\sqrt{2}$ ← décomposition en série de Fourier

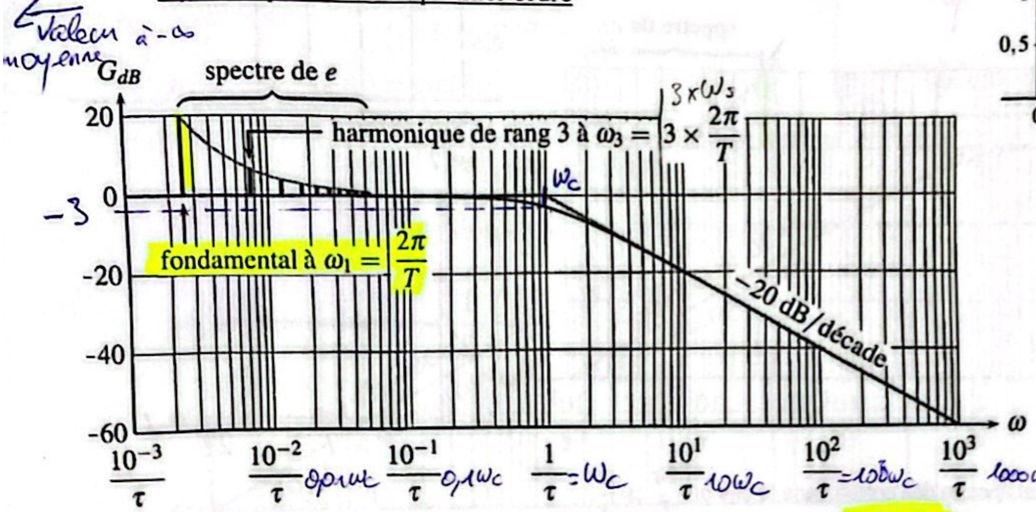
Amplitude — Valeur efficace.

* On admet que : $U_{eff}^2 = U_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} U_{n,eff}^2$ Formule de Parseval

donc $\frac{U_{eff}^2}{R} = \frac{U_0^2}{R} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_{n,eff}^2}{R}$ donc $P_R = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n$ *

La puissance moyenne absorbée par la résistance R, due à la tension u(t) est la somme des puissances dues à chacune des composantes de Fourier de la tension u(t) (sa valeur moyenne, son fondamental et toutes ses harmoniques).

2.) Filtre passe-bas du premier ordre



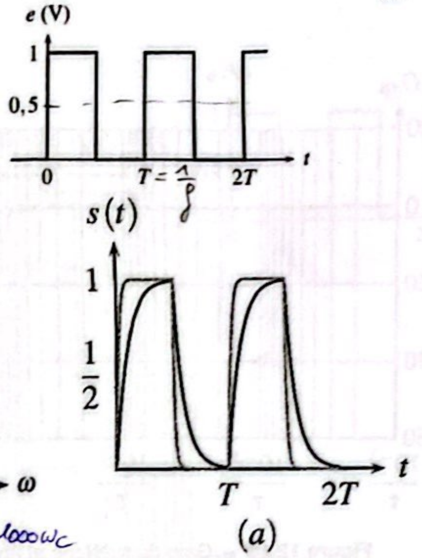
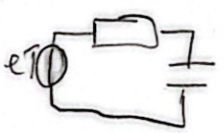


Figure 12.15 – Gain du système et spectre de l'entrée dans le cas où $\frac{2\pi}{T} \ll \frac{1}{\tau}$.

Filtrage passe-bas d'un signal créneaux (a) T = 50 τ en gris et T = 10 τ en noir

ex : RC série sortie sur C

$\underline{H} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$



$\tau = \frac{1}{\omega_c} \Rightarrow \underline{H} = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$

(Rq : en S.I : $p = j\omega \Rightarrow \underline{H} = \frac{1}{1+\tau p}$).

1^{er} cas : ① $\frac{2\pi}{T} \ll \frac{1}{\tau}$, $T = T_s$

$\Rightarrow \omega_s \ll \omega_c$

pulsation du signal — pulsation de coupure

$\begin{cases} \omega_s = 2\pi f_s \\ \omega_c = 2\pi f_c \end{cases} \Rightarrow f_s \ll f_c$

① $\Rightarrow \frac{2\pi}{T} \ll \tau \Rightarrow T \gg 2\pi\tau$

La valeur moyenne, le fondamental et les premières harmoniques sont dans la bande passante du filtre
$\Rightarrow$ elles passent sans atténuation

Les harmoniques hautes fréquences sont atténuées (sur la partie du DBA de pente –20 dB/dec)
$\Rightarrow$ arrondissement des angles

+ ω_s se rapproche de ω_c, + le signal est arrondi.

$s(t) \simeq e(t)$ si $\omega_s \ll \omega_c$

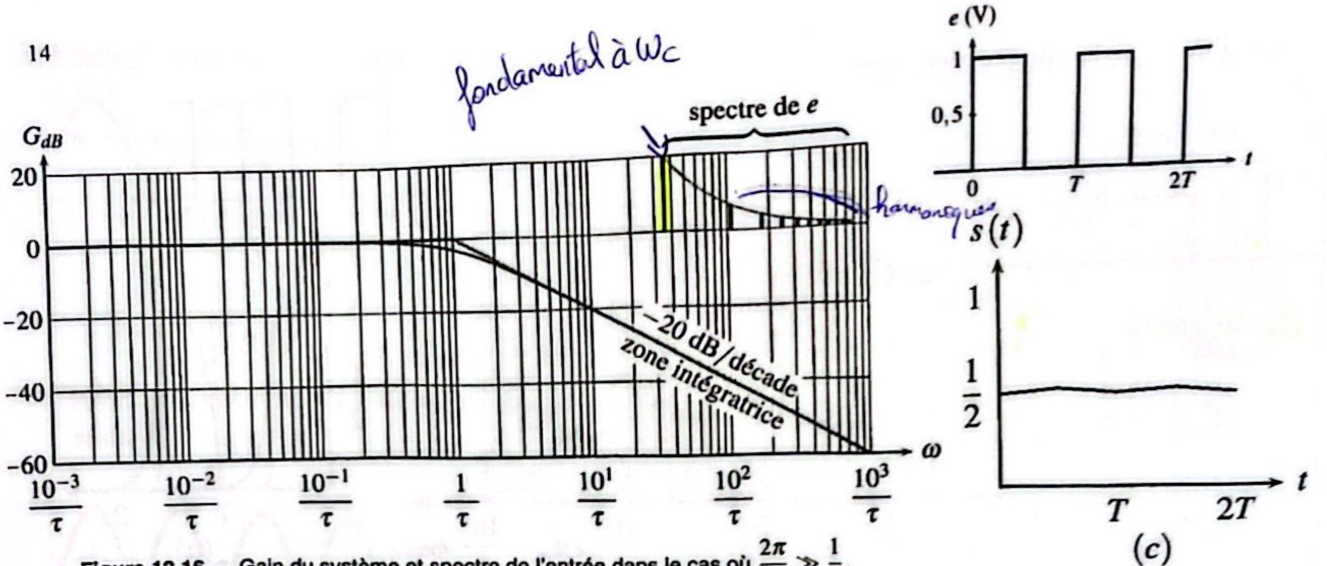


Figure 12.16 – Gain du système et spectre de l'entrée dans le cas où $\frac{2\pi}{T} \gg \frac{1}{\tau}$.

Filtrage passe-bas d'un signal créneaux (c) T = 0,1 τ.

2^e cas : $\frac{2\pi}{T} \gg \frac{1}{\tau} \Rightarrow T \ll 2\pi\tau$

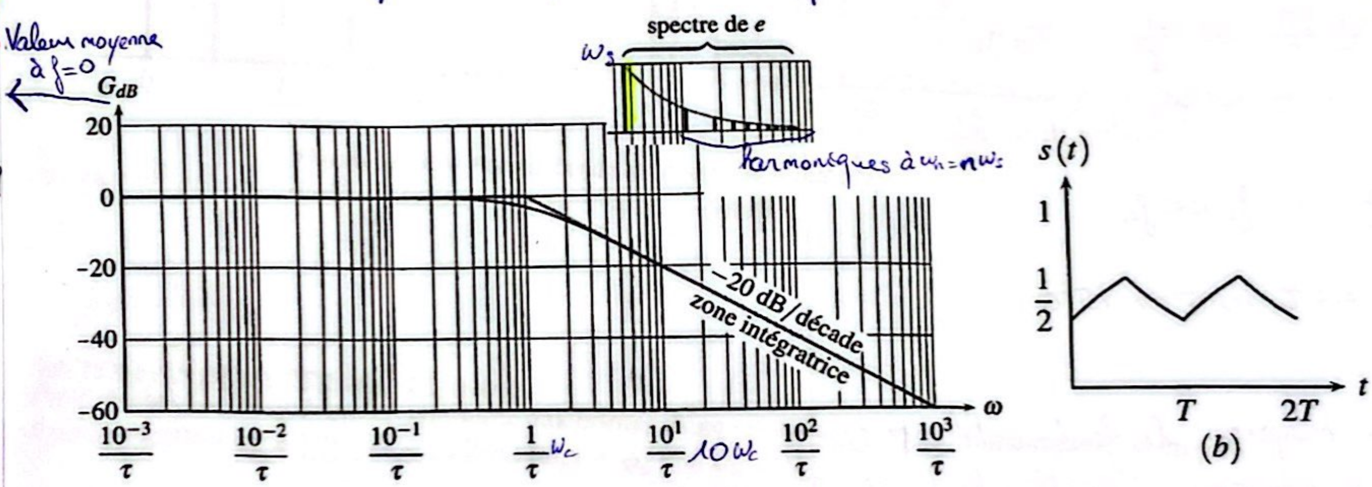
$\Rightarrow \omega_s \gg \omega_c$, $f_s \gg f_c$

La valeur moyenne est dans la bande passante du filtre, elle n'est pas atténuée

* Le fondamental et H les harmoniques sont fortement atténués

* $\Rightarrow s(t) = \langle e \rangle \Rightarrow$ le filtre se comporte comme un moyenneur

* Valeur moyenne à $f=0$



Rq

* Filtrage passe-bas d'un signal créneaux (b) T = τ.

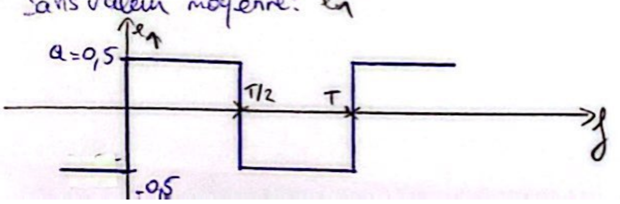
3^e cas : $T = \tau \Rightarrow \omega_s = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\tau}$

$\Rightarrow \omega_s = 2\pi\omega_c$

$\Rightarrow \omega_s \simeq 6{,}5\ \omega_c$

La valeur moyenne est passée (sans atténuations)

sans valeur moyenne : e_1



entre 0 et $\frac{T}{2}$, $e_1 = a \Rightarrow s_1 = at + b$

entre $\frac{T}{2}$ et T : $e_1 = -a \Rightarrow s_1 = -at + b'$

$\Rightarrow$ signal triangulaire qui correspond à la primitive du signal d'entrée

↳ le filtre se comporte comme un intégrateur

$s(t) = s_1(t) + \langle e \rangle$

3.) Filtre passe-haut du premier ordre

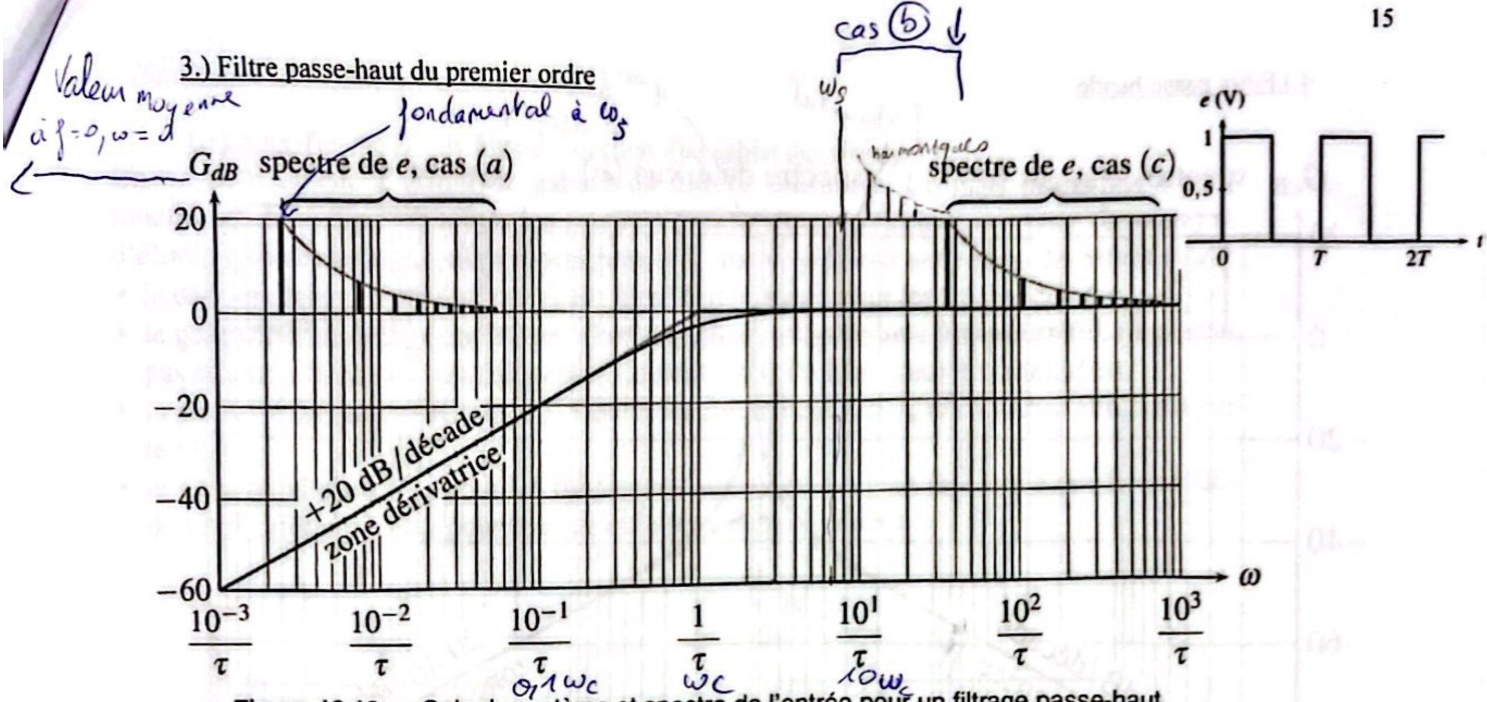


Figure 12.18 – Gain du système et spectre de l'entrée pour un filtrage passe-haut.

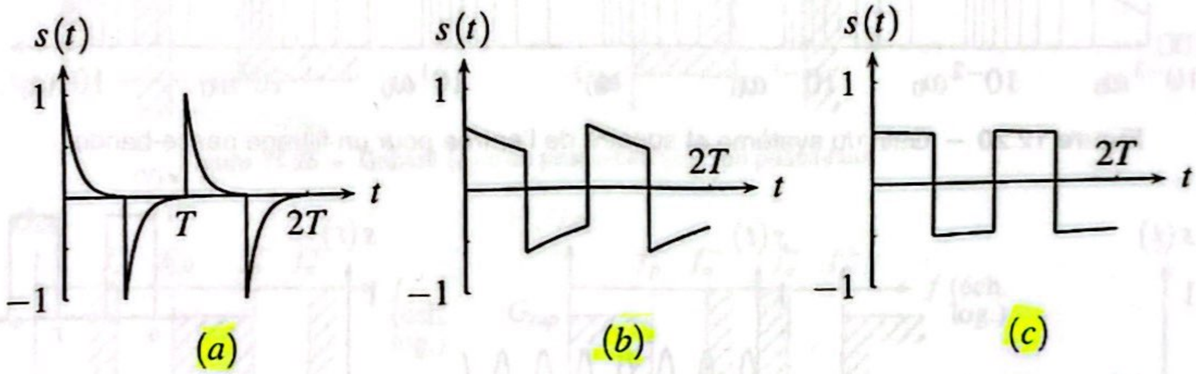
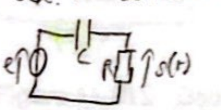


Figure 12.19 – Filtrage passe-haut d'un signal créneau (a) $T = 10\tau$, (b) $T = \tau$, (c) $T = 0{,}1\tau$.

$$\underline{H} = \frac{j\frac{\omega}{\omega_c}}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}}$$

ex: RC sortie sur R



$\tau = \frac{1}{\omega_c}$

$\hookrightarrow \underline{H} = \frac{j\omega\tau}{1+j\omega\tau}$, signal de période $T = \frac{2\pi}{\omega_s}$

Cas (a) : $\omega_s \ll \omega_c \;(\Rightarrow T \gg \tau)$

On obtient la dérivée du signal d'entrée, la composante continue étant coupée

Cas (b) : $T = \tau$

$\Rightarrow \omega_s = \frac{2\pi}{\tau}$

$\Rightarrow \omega_s = 2\pi\omega_c \simeq 6{,}3\,\omega_c$

la valeur moyenne étant coupée

Cas (c) : $\omega_s \gg \omega_c$

graphiquement, le signal est dans la bande passante du filtre (≃ le même), il passe sans déformation, la composante étant coupée.

$T = 0{,}1\tau \Rightarrow \omega_s = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}1\tau}$

$\Rightarrow \omega_s = 63\,\omega_c$

4.) Filtre passe-bande

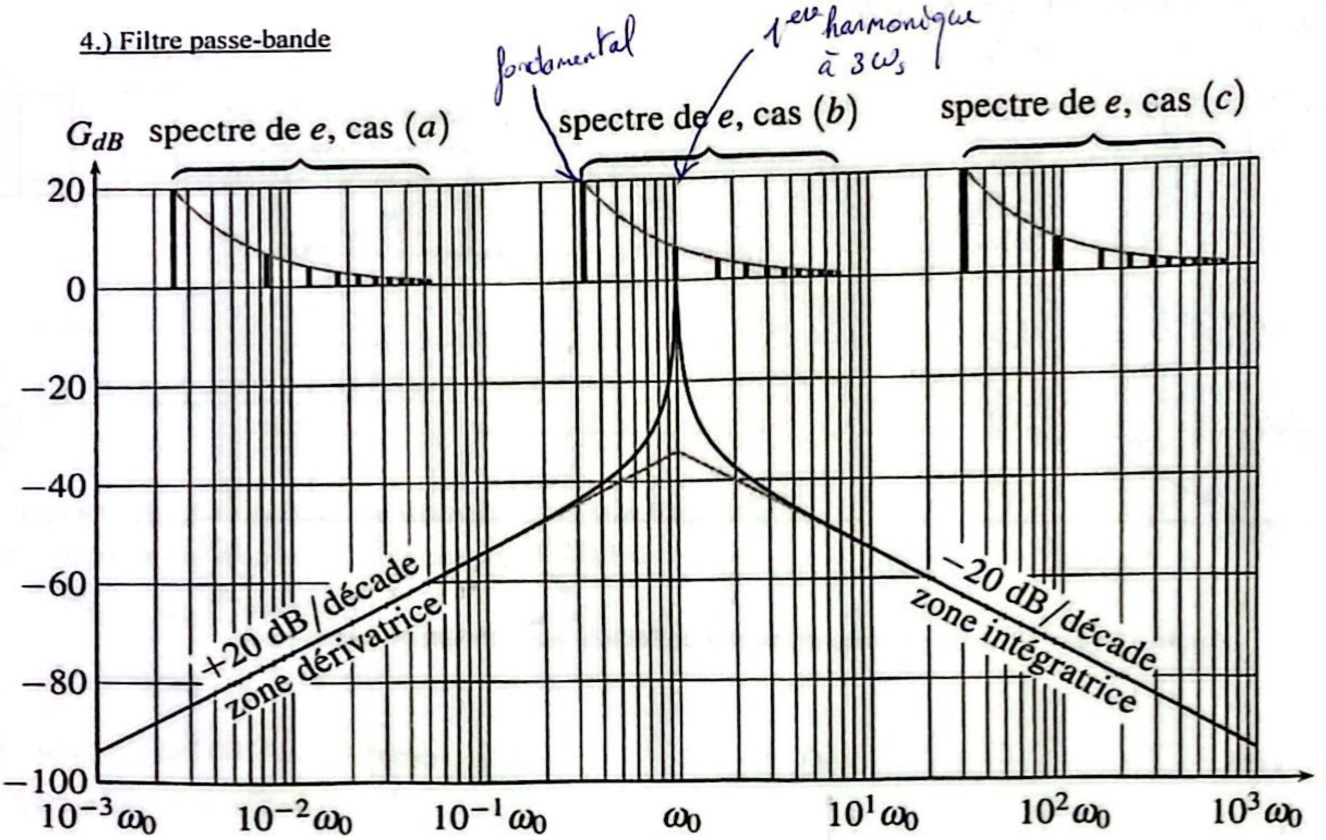


Figure 12.20 – Gain du système et spectre de l'entrée pour un filtrage passe-bande.

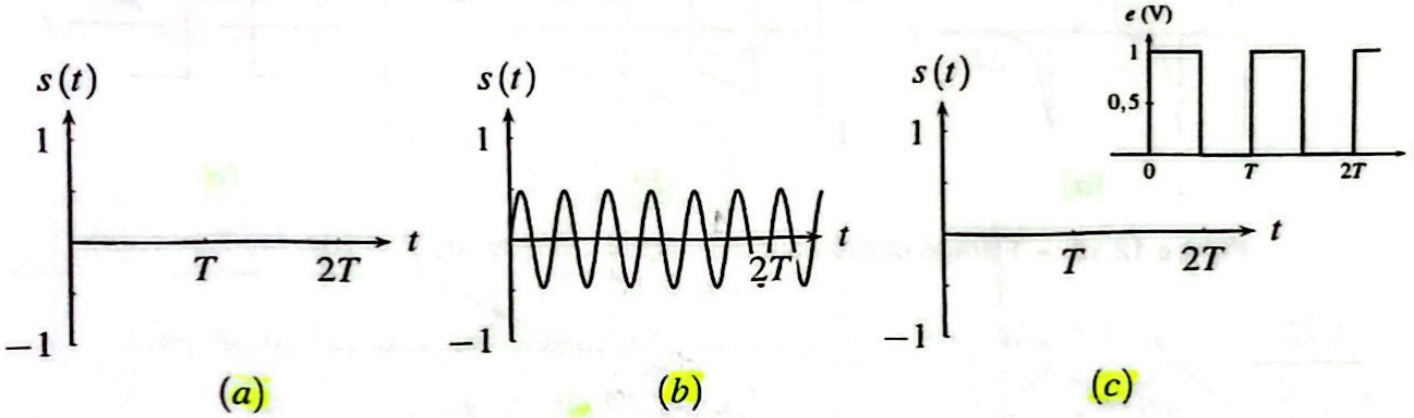
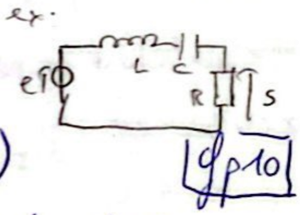


Figure 12.21 – Filtrage passe-bande d'un signal créneau : (a) $\frac{2\pi}{T} \ll \omega_0$, (b) $3 \times \frac{2\pi}{T} = \omega_0$, (c) $\frac{2\pi}{T} \gg \omega_0$.

$\underline{H} = \frac{1}{1+jQ(x-\frac{1}{x})}$ ex :



$x = \frac{\omega}{\omega_s} \Rightarrow \underline{H} = \frac{1}{1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_s}-\frac{\omega_s}{\omega}\right)}$

Max de gain : $\omega = \omega_0$, $\underline{H} = 1$, $G = 0$

les asymptotes se coupent en $y = -20 \log G$

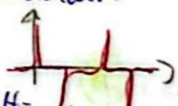
Graphe : $y = -32 = -20 \log Q \rightarrow \log Q = \frac{32}{20}$

$Q = 10^{1,6} = 40 \Rightarrow$ filtre très sélectif.

cas (b) : $\omega_0 = 3\omega_s$; une seule harmonique passe de pulsation $\omega_3 = 3\omega_s$, de période $T_3 = \frac{2\pi}{\omega_3} = \frac{2\pi}{3\omega_s} = \frac{T}{3}$

$\Rightarrow$ signal sinusoïdal de valeur moyenne nulle.

cas (a) : zone dérivative avec une très forte atténuation $\Rightarrow$ signal de sortie quasi nul, avec Q + petit on aurait :



cas (c) : zone intégratrice avec une très forte atténuation. Avec Q + petit on aurait.

Scanned with CamScanner

V Utilisation des filtres

1.) Choix d'un modèle de filtre en fonction d'un cahier des charges.

On est donc amené à définir un gabarit du filtre à construire. Un filtre **passe-bas** a pour fonction de laisser passer toutes les fréquences inférieures à f_p (indice p pour passante) et d'éliminer toutes les fréquences supérieures à f_a (indice a a pour atténuée). On définit alors :

- la dernière **fréquence passante** f_p (le filtre doit laisser passer les fréquences $f < f_p$),
- le **gain minimum** G_{sup}, en dB, pour les fréquences qui passent à travers le filtre (il ne doit pas être trop faible, car ces fréquences doivent sortir du filtre sans être atténuées),
- la première **fréquence atténuée** f_a (toutes les fréquences $f > f_a$ doivent être éliminées par le filtre),
- le **gain maximum** G_{inf} pour les fréquences atténuées. Le gain du filtre à ces fréquences doit être inférieur à G_{inf} pour être sûr qu'elles soient éliminées.

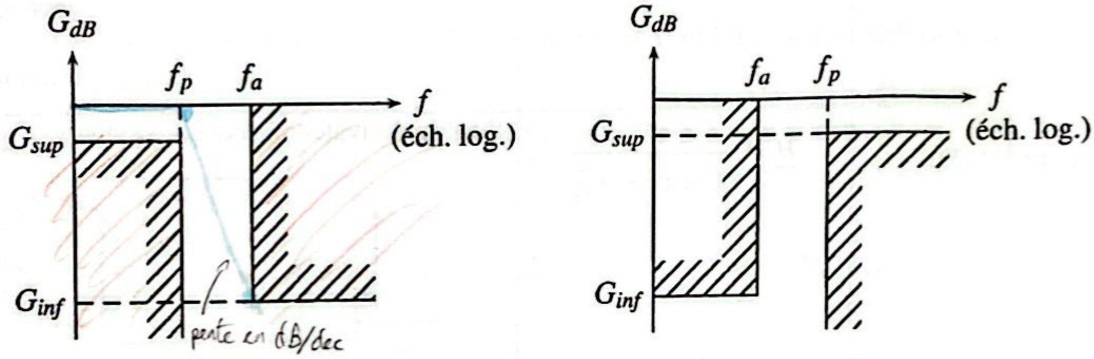


Figure 11.25 – Gabarit (a) d'un passe-bas (b) d'un passe-haut.

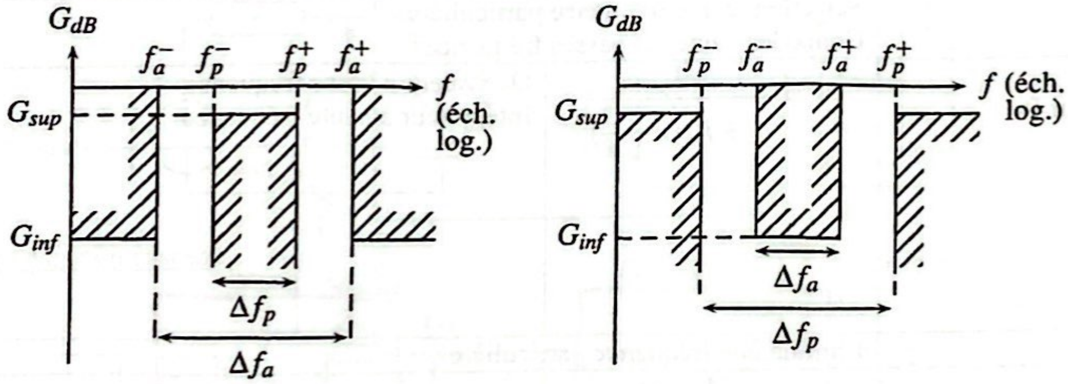
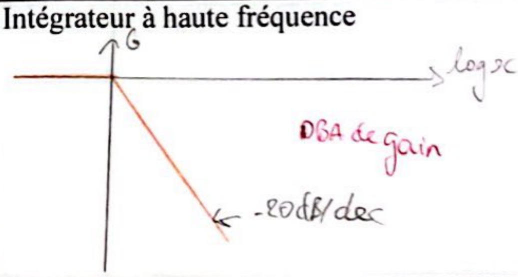
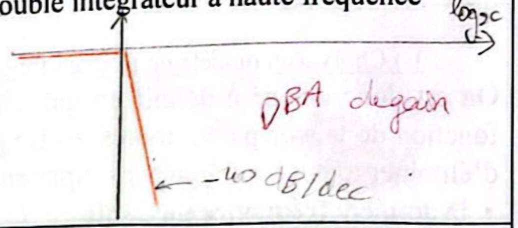
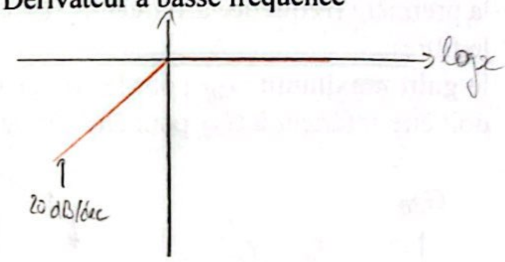
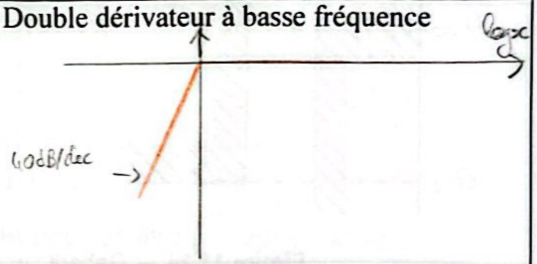
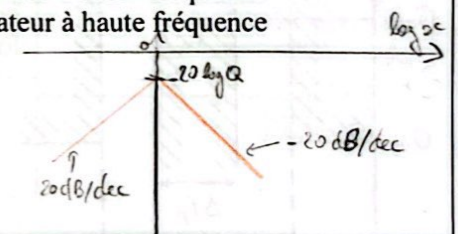
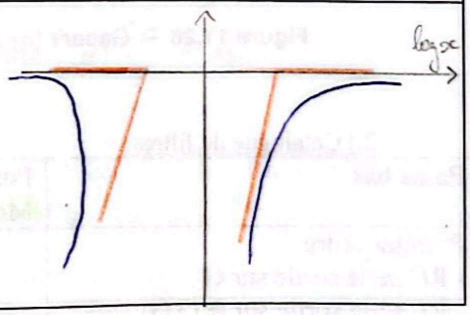


Figure 11.26 – Gabarit (c) d'un passe-bande (d) d'un coupe-bande.

2.) Catalogue de filtres.

Passe bas	Permet de recueillir l'information sur la forme générale du signal. Moyenneur.	
Premier ordre : - RC série sortie sur C - RL série sortie sur R (TD)	$\underline{H} = \dfrac{1}{1 + jx}$	Intégrateur à haute fréquence 

Second ordre : - RLC série sortie sur C	$\underline{H} = \dfrac{1}{1 - x^2 + j\dfrac{x}{Q}}$	Double intégrateur à haute fréquence 
Passe haut	Permet de recueillir l'information relative aux détails du signal. Elimine la valeur moyenne.	
Premier ordre : - RC série sortie sur R - RL série sortie sur L (TD)	$\underline{H} = \dfrac{jx}{1 + jx}$	Dérivateur à basse fréquence 
Second ordre : - RLC série sortie sur L (TD)	$\underline{H} = \dfrac{-x^2}{1 - x^2 + j\dfrac{x}{Q}}$	Double dérivateur à basse fréquence 

Passe bande	Sélectionne une fréquence particulière. Coupe les hautes et basses fréquences.	
Second ordre : - RLC série sortie sur R	$\underline{H} = \dfrac{1}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})}$	Dérivateur à basse fréquence Intégrateur à haute fréquence 
Coupe bande	Elimine une fréquence particulière.	
Second ordre : - RLC série sortie sur (L,C) (TD)	$\underline{H} = \dfrac{1 - x^2}{1 - x^2 + j\dfrac{x}{Q}}$	

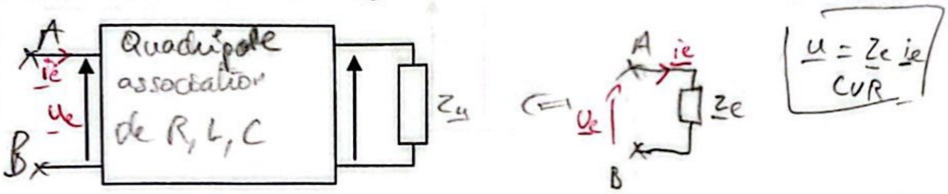
3.) Mise en cascades de deux filtres.

a) Impédances d'entrée et de sortie.

Impédance d'entrée : $\underline{Z}_e = \dfrac{\underline{u}_e}{\underline{i}_e}$ ** En présence de $\underline{Z}_u$: impédance d'entrée en charge.

En l'absence de $\underline{Z}_u$: impédance d'entrée à vide.

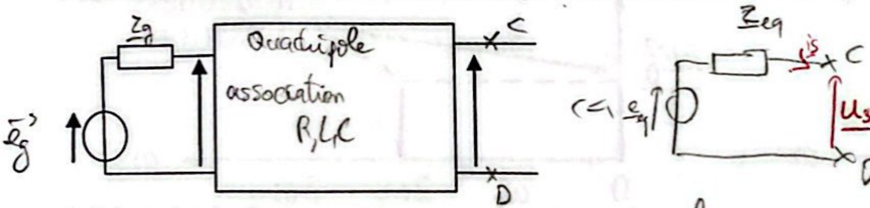
On a un dipôle linéaire passif vu de l'entrée (entre A et B) : il est modélisable depuis l'entrée par une impédance équivalente puisqu'il ne contient pas de générateur.
Pour la calculer, on débranche le générateur et on fait des schémas équivalents.



Impédance de sortie

On a un dipôle linéaire actif vu de la sortie (entre C et D) : il est modélisable depuis la sortie par un générateur équivalent de Thévenin.

Pour la calculer, on débranche la charge et on fait des schémas équivalents. $\underline{Z}_s = -\dfrac{\underline{u}_s}{\underline{i}_s}$ *



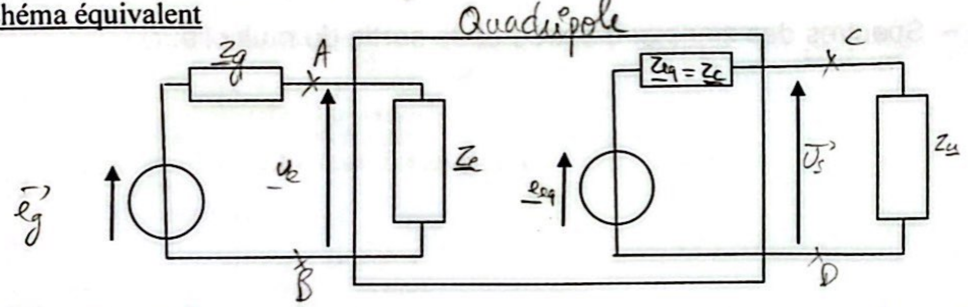
CVG

$\underline{U_s} = \underline{e_{eq}} - \underline{Z_{eq}}\,\underline{i_s}$ or $e_g = 0 \Rightarrow \underline{e_{eq}} = 0$

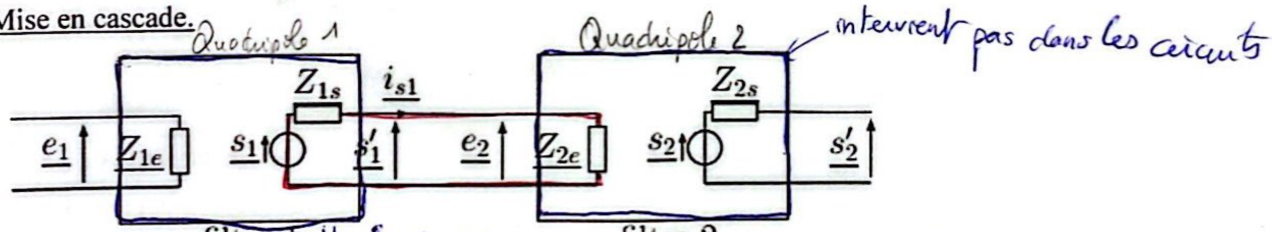
$\Rightarrow u_s = -Z_{eq}\, i_s$

$\Rightarrow \boxed{\underline{Z_{eq}} = -\dfrac{\underline{U_s}}{\underline{i_s}} = \underline{Z_s}}$

Schéma équivalent



b) Mise en cascade.



filtre 1 $\underline{H_1} = \dfrac{\underline{s_1}}{\underline{e_1}}$ (à vide) filtre 2 $\underline{H_2} = \dfrac{\underline{s_2}}{\underline{e_2}}$ (à vide)

On veut : $\underline{H} = \dfrac{\underline{s_2}}{\underline{e_1}} = \dfrac{\underline{s_2}}{\underline{e_2}} \times \dfrac{\underline{s_1}}{\underline{e_1}} = \underline{H_2} \times \underline{H_1}$

On veut $\underline{s'_1} = \underline{s_1}$

Enfin, on a : $\underline{s'_1} = \dfrac{\underline{Z_{2e}}}{\underline{Z_{1s}} + \underline{Z_{2e}}}\,\underline{s_1}$

$s'_1 \simeq s_1$ si $Z_{2e} \gg Z_{1s}$

($\Rightarrow s'_1 \simeq \frac{Z_{2e}}{Z_{2e}}\, s_1$)

$\underline{H_1} = \dfrac{\underline{s_1}}{\underline{e_1}}$ à vide

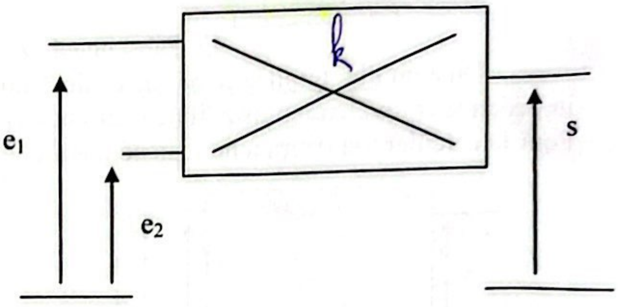
$\Rightarrow$ le quadripôle est à vide si le courant de sortie $\underline{i_s} \simeq 0$

or $\underline{i_{s1}} \simeq \dfrac{\underline{e_2}}{\underline{Z_{2e}}}$ donc on veut $|\underline{Z_{2e}}| \gg 1$

Pour trouver ce résultat, il faut : $\underline{i_{s1}} = 0$, soit $\underline{Z_{2e}} \gg 1$ et $\underline{e_2} = \underline{s_1}$ soit $\underline{Z_{2e}} \gg \underline{Z_{1s}}$
C'est ce qu'on appelle l'adaptation d'impédance.

4.) Exemple de filtre non linéaire : le multiplieur

On aura en sortie : $s(t)=k.e_1(t).e_2(t)$ où k est le gain du multiplieur (en V^{-1}).



Si $e_1(t)=e_2(t)=E_0 \cos(\omega_e t)$,

alors $s(t) = kE_0^2 cos^2(\omega_e t) = kE_0^2 \frac{1+\cos(2\omega_e t)}{2}$

$\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1 \Rightarrow \cos^2(a) = \frac{\cos(2a)+1}{2}$

$\Rightarrow s(t) = \frac{kE_0^2}{2} + \frac{kE_0^2}{2}\cos(2\omega_e t)$

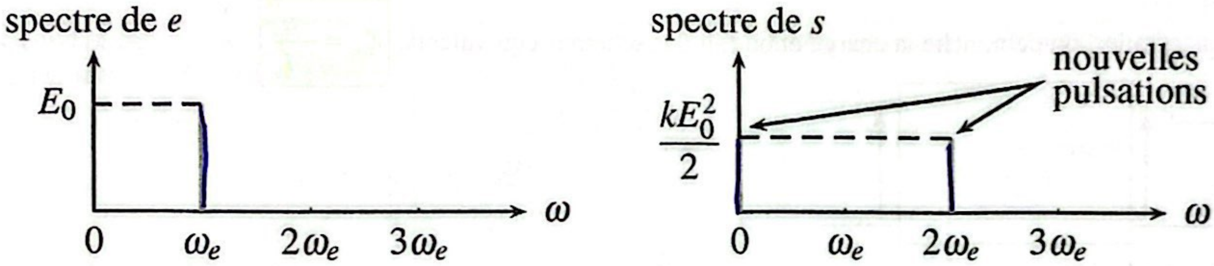


Figure 10.18 – Spectres des signaux d'entrée et de sortie du multiplieur.

VI Capacité numérique : Simuler l'action d'un filtre sur un signal périodique.

```
##SE6 Capacité numérique
##effet d'un filtre sur un signal périodique

##exemple du signal créneau et des filtres passe bas et passe haut du premier ordre (variable fo)

##importation des bibliothèques

import numpy as np
import scipy.integrate as spi
import matplotlib.pyplot as plt

##definition des filtres du premier ordre:
##Filtre passe bas
def passebas(f,fo):#définition du module de H#          H = 1/(1+jx)
    x=f/fo
    h=1/(1+x**2)**(0.5)       |H| = 1/√(1+x²)
    return(h)

def phasebas(f,fo):#définition du l'argument de H#
    x=f/fo
    phib=-np.arctan(x)
    return(phib)               φb = - arctan(x)

##Filtre passe haut
def passehaut(f,fo):                                    H = jx/(1+xj)
    x=f/fo
    h=x/(1+x**2)**(0.5)       |H| = x/√(1+x²)
    return(h)

def phasehaut(f,fo):
    x=f/fo
    phih=-np.arctan(x)+np.pi/2     φh = π/2 - Arctan x
    return(phih)

##spectre du signal d'entrée créneau:
                       # On crée une liste des fréquences du signal d'entrée
F=[0] #frequence nulle
f=1000 #fondamental (à modifier)
N=200 #nombres d'harmoniques
for k in range(1,N):#Les fréquences des harmoniques#
    y=f*k
    F.append(y)

                 On crée la liste des amplitudes du signal d'entrée Ae
Ae=[0.5] #composante continue
A=1 #amplitude du fondamental
for k in range(1,N):#cas d'un signal creneau
    if k%2==0:
        y=0       ) harmoniques paires nulles
    else:
        y=A/k     ) harmoniques impaires en 1/n
    Ae.append(y)

##fonction produit de listes:

def prod(A,B):
    C=[]
    for k in range(len(A)):
        x=A[k]*B[k]
        C.append(x)
    return(C)
##calcul du spectre en sortie

fo=2000 #fréquence de coupure du filtre# (à modifier)

Hpb=[passebas(freq,fo) for freq in F]#création de la liste des amplitudes#
Aspb=prod(Hpb,Ae)
phipb=[phasebas(freq,fo) for freq in F]#création de la liste des arguments#  = liste des phases

Hph=[passehaut(freq,fo) for freq in F]
Asph=prod(Hph,Ae)
phiph=[phasehaut(freq,fo) for freq in F]
```

```
##tracé des courbes

##effet du passe bas

plt.bar(F,Ae,200,color='r',label="Signal d'entrée")
plt.bar(F,Aspb,100,color='b',label='Signal de sortie du passe-bas')

plt.xlabel('frequences')
plt.ylabel('An')
plt.axis([-2000,20000,0,1])
plt.title('spectres de fréquence')
plt.legend()


##effet du passe haut
plt.figure()
plt.bar(F,Ae,200,color='r',label="Signal d'entrée")
plt.bar(F,Asph,100,color='b',label='Signal de sortie du passe-haut')

plt.xlabel('frequences')
plt.ylabel('An')
plt.axis([-2000,20000,0,1])
plt.title('spectres de fréquence')
plt.legend()



##Courbes temporelles
les_t=np.linspace(0,3/f,2000)#intervalle de temps

les_e=[]#Création de la liste des amplitudes pour la tension d'entrée#
les_sb=[]#Création de la liste des amplitudes pour la tension de sortie#
les_sh=[]

for t in les_t:
    e=Ae[0]
    sb=Aspb[0]
    sh=Asph[0]
    for k in range (1,N):
        e=e+Ae[k]*np.sin((2*np.pi*f*k)*t)
        sb=sb+Aspb[k]*np.sin((2*np.pi*f*k)*t+phipb[k])
        sh=sh+Asph[k]*np.sin((2*np.pi*f*k)*t+phiph[k])
```

Théorème de Fourier

```
    les_e.append(e)
    les_sb.append(sb)
    les_sh.append(sh)

plt.figure()
plt.plot(les_t,les_e)
plt.title('signal d entrée: e(t)')
plt.xlabel('t(s)')
plt.ylabel('e(V)')
plt.figure()
plt.plot(les_t,les_sb)
plt.title('s(t) pour le filtre passe bas')
plt.xlabel('t(s)')
plt.ylabel('e(V)')
plt.figure()
plt.plot(les_t,les_sh)
plt.title('s(t) pour le filtre passe haut')
plt.xlabel('t(s)')
plt.ylabel('e(V)')

plt.show()
```