

Représentation complexe

$$j^2 = -1 \text{ et } j = \exp(j\pi/2)$$

$$\underline{z} = x + jy \quad |\underline{z}| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \underline{z} = |\underline{z}| \cdot \left[\frac{x}{|\underline{z}|} + j \frac{y}{|\underline{z}|} \right]$$

$$\underline{z} = |\underline{z}| e^{j\varphi} = |\underline{z}| [\cos\varphi + j\sin\varphi] \text{ donc } \cos\varphi = \frac{x}{|\underline{z}|} \quad \sin\varphi = \frac{y}{|\underline{z}|} \quad \tan\varphi = \frac{y}{x}$$

Hypothèses : Dipôle linéaire passif en convention récepteur

parcouru par $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$ $\underline{i}(t) = I_m \exp[j(\omega t + \varphi_i)] = \underline{I}_m \exp(j\omega t)$. où $\underline{I}_m = I_m \exp(j\varphi_i)$
à ses bornes $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$ $\underline{u}(t) = U_m \exp[j(\omega t + \varphi_u)] = \underline{U}_m \exp(j\omega t)$. où $\underline{U}_m = U_m \exp(j\varphi_u)$

Impédance complexe du dipôle

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}}$$

Admittance complexe du dipôle

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{\underline{i}}{\underline{u}}$$

Résistor : $\underline{Z}_R = R$

Bobine idéale : $\underline{Z}_L = jL\omega$

Condensateur parfait : $\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$

I Le cricuit RLC série

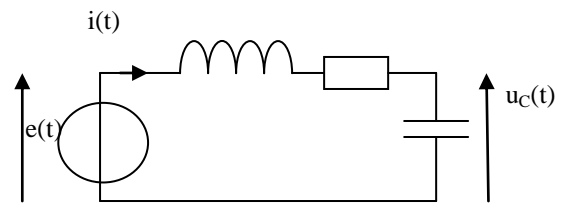
1) Etude de l'intensité

$$e(t) = E_m \cos(\omega t) \quad \underline{e} = E_m e^{j\omega t}$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) \quad \underline{i} = I_m e^{j\omega t}$$

Equation de maille en complexe :

$$\frac{\underline{i}}{\underline{e}} = \frac{I_m}{E_m} = \frac{1}{R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})}$$



puis on étudie le module et l'argument en fonction de ω .

Equation différentielle :

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i(t) = \frac{1}{L} \frac{de}{dt}$$

à retrouver

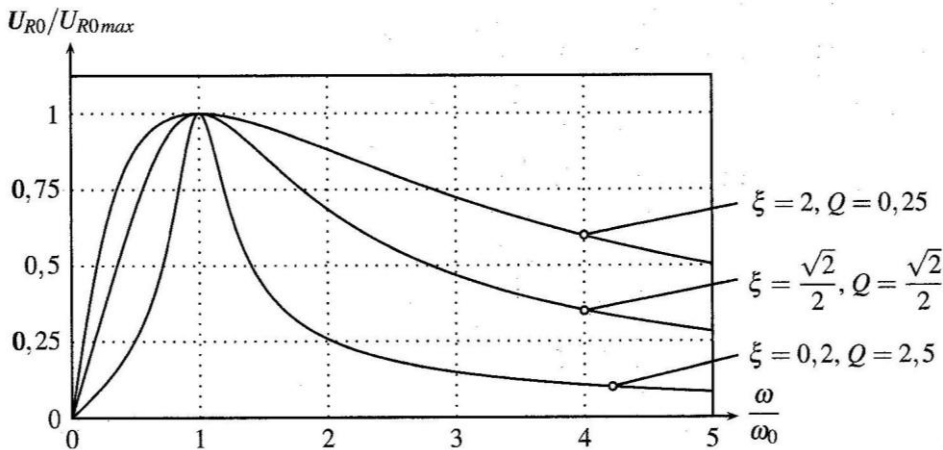
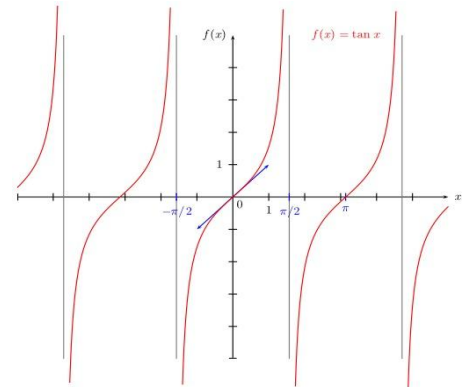
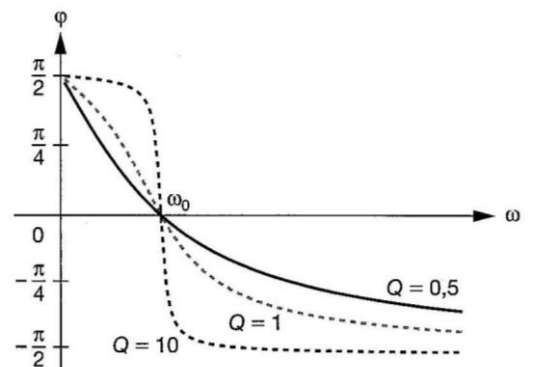


Figure 10.17 - Rapports de l'amplitude de u_R à sa valeur maximale (R variable).



Bande passante à -3dB : Intervalle de pulsation pour lequel $I_m \geq \frac{I_{mR}}{\sqrt{2}}$

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$$

$$\varphi = \mp \frac{\pi}{4}$$

I_{mR} : amplitude de l'intensité à la résonance.

2) Etude de la tension aux bornes du condensateur

$e(t) = E_m \cos(\omega t)$ $\underline{e} = E_m e^{j\omega t}$
 $u_C(t) = U_{cm} \cos(\omega t + \varphi_u)$ $\underline{u}_C = \underline{U}_{cm} e^{j\omega t}$

Pont diviseur de tension : $\frac{u_C}{e} = \frac{U_{cm}}{E_m} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$

$\frac{U_{cm}}{E_m} = \frac{1}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$ où $x = \frac{\omega}{\omega_0}$

Retrouver $\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C(t) = \omega_0^2 e(t)$

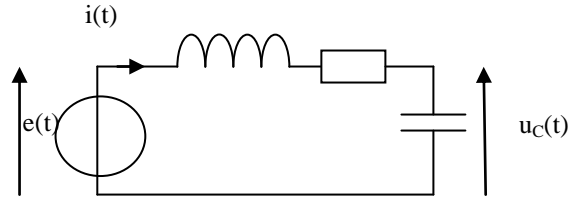
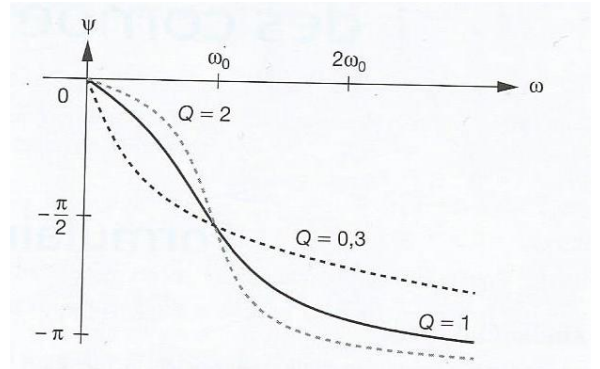
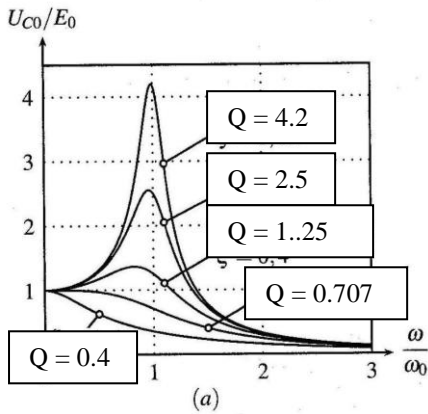
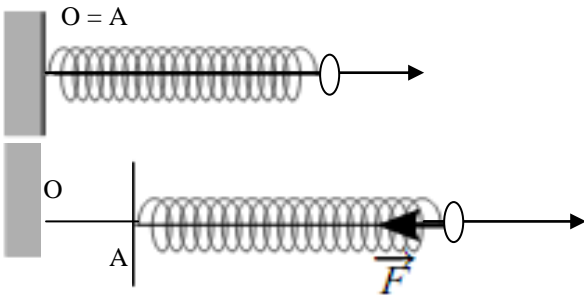


Figure 10.19 – Étude de la résonance aux bornes du condensateur



II L'oscillateur harmonique amorti



$\ell = x_M - x_A$ et $x_1 = x_M - \ell_0$

Force de frottement fluide : $\vec{F}_f = -\alpha \vec{v}$

Force de rappel du ressort : $\vec{F}_r = -k(\ell - \ell_0) \vec{e}_x$

$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{\alpha}{m} \frac{dx_1}{dt} + \frac{k}{m} x_1 = \frac{k}{m} x_A$

$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx_1}{dt} + \omega_0^2 x_1 = \omega_0^2 x_A$

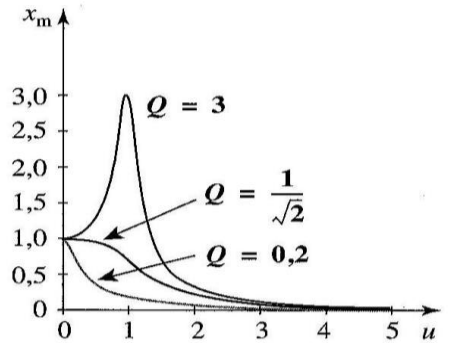
$x_A(t) = A \cos(\omega t)$ donc $\underline{x}_A = A e^{j\omega t}$

$x_1(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ donc $\underline{x}_1 = \underline{X} e^{j\omega t}$: mêmes courbes que u_C

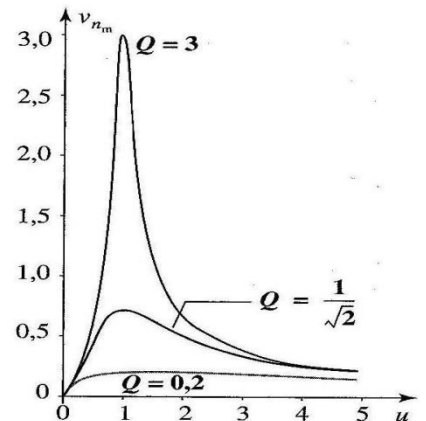
$\frac{\underline{X}}{A} = \frac{1}{1 - u^2 + j\frac{u}{Q}}$ où $u = \frac{\omega}{\omega_0}$

$v = \frac{dx_1}{dt}$ donc $\underline{V} = j\omega \underline{X}$ même courbe de phase que i

$\frac{\underline{V}}{A} = \frac{\omega_0 Q}{1 + jQ(u - \frac{1}{u})}$



Doc. 8. Variation de l'amplitude normalisée $x_{n_m} = \frac{x_m}{x_{A_m}}$ de la réponse en élongation en fonction de $u = \frac{\omega}{\omega_0}$ pulsation normalisée de l'excitation pour différents amortissements.



Doc. 12. Variation de l'amplitude : $v_{n_m} = \frac{v_m}{\omega_0 x_{A_m}}$ de la réponse en vitesse en fonction de la pulsation normalisée $u = \frac{\omega}{\omega_0}$ de l'excitation, pour différents