Vacances de Noël : Corrigé des exercices .

Merci de me signaler les coquilles éventuelles.

Calcul des intégrales

1°) On pose $t = \ln(x)$. $x \mapsto \ln x$ est de classe C^1 sur $[1, e]$.

On note : $\mathrm{d}t = \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x$. $\begin{cases} \text{Si } x = 1 \text{ alors } t = 0 \\ \text{Si } x = e \text{ alors } t = 1 \end{cases}$

$I_1 = \displaystyle\int_1^e \frac{1}{\sqrt{1+\ln x}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$

Par le théorème du changement de variables,

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t = 2\left[\ \sqrt{1+t}\ \right]_0^1 = 2(\sqrt{2}-1)$$

2°) Soit u et v les fonctions de classe C^1 sur $[0, 1]$:

$\forall x \in [0, 1]$,

$$u(x) = \ln(1+x^2) \qquad u'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$
$$v(x) = x \qquad v'(x) = 1$$

Par intégration par parties,

$$\begin{aligned} I_2 &= [x\ln(1+x^2)]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \ln 2 - 2\int_0^1 \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \ln 2 - 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \ln 2 - 2\,[\,x - \mathrm{Arctan}(x)\,]_0^1 \\ &= \ln 2 - 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

3°) On pose : $t = \sin(\theta)$, $\theta \mapsto \sin(\theta)$ est de classe C^1 sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

On node : $\mathrm{d}t = \cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta$. $\begin{cases} \text{Si } \theta = 0 \text{ alors } t = 0 \\ \text{Si } \theta = \dfrac{\pi}{2} \text{ alors } t = 1 \end{cases}$

Par le théorème du changement de variables,

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(\theta)\underbrace{\sqrt{1-\sin^2(\theta)}}_{\sqrt{\cos^2(\theta)}}\cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(\theta)|\cos(\theta)|\cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(\theta)\cos^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$\forall \theta \in \mathbb{R}, \sin^2(\theta)\cos^2(\theta) = (\sin(\theta)\cos(\theta))^2 = \left(\dfrac{\sin(2\theta)}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}\sin^2(2\theta) = \dfrac{1}{8}(1-\cos(4\theta))$

(cf. $\sin^2(\alpha) = \dfrac{1-\cos(2\alpha)}{2}$: à retrouver).

Ainsi, $I_3 = \dfrac{1}{8}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos(4\theta))\,\mathrm{d}\theta = \dfrac{1}{8}\left[\theta - \dfrac{\sin(4\theta)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi}{16}$

4°) On pose $t = \cos(x), x \mapsto \cos(x)$ est de classe C^1 sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

On note $\mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x$. $\begin{cases} \text{Si } x = 0 \text{ alors } t = 1 \\ \text{Si } x = \dfrac{\pi}{2} \text{ alors } x = 0 \end{cases}$.

Par le théorème du changement de variables, $I_4 = -\displaystyle\int_1^0 \ln(3+t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \ln(3+t)\,\mathrm{d}t$.

Ensuite, par intégration par parties(*à faire*), $I_4 = [t\ln(3+t)]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 \dfrac{t}{3+t}\,\mathrm{d}t$.

Puis astuce au numérateur : $(t+3)-3$ puis on coupe etc...

Finalement, $I_4 = 4\ln(4) - 3\ln(3) - 1$.

5°)

$$\begin{aligned}
I_5 &= \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{4\left(x^2 - x + \frac{10}{4}\right)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \frac{10}{4}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}\int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}\right)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\frac{9}{4}\left(\frac{4}{9}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + 1\right)}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{9}\int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\left(\frac{2x-1}{3}\right)^2 + 1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{9} \times \frac{3}{2}\int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{2}{3}\frac{1}{\left(\frac{2x-1}{3}\right)^2 + 1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{6}\left[\mathrm{Arctan}\left(\frac{2x-1}{3}\right)\right]_{-1}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}(\mathrm{Arctan}(0) - \mathrm{Arctan}(-1)) \\
&= \frac{\pi}{24}
\end{aligned}$$

6°) On pose : $t = \sqrt{x^2-1}$. $x \mapsto \sqrt{x^2-1}$ est de classe C^1 sur $[\sqrt{2}, \sqrt{5}]$.

On note $\mathrm{d}t = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$. $\begin{cases} \text{Si } x = \sqrt{2} \text{ alors } t = 1 \\ \text{Si } x = \sqrt{5} \text{ alors } t = 2 \end{cases}$

$I_6 = \displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \dfrac{1}{x^2}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$.

Si $t = \sqrt{x^2-1}$ alors $t^2 = x^2 - 1$ donc $x^2 = 1 + t^2$.

Ainsi, par le théorème du changement de variables, $I_6 = \displaystyle\int_1^2 \dfrac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = [\,\mathrm{Arctan}(t)\,]_1^2 = \mathrm{Arctan}(2) - \dfrac{\pi}{4}$.

7°) $I_7 = \displaystyle\int_{-1}^1 \left(\dfrac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{e^x}\right)\right)\mathrm{d}x$ car pour tout $t > 0, \mathrm{Arctan}(t) + \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{t}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

$I_7 = \dfrac{\pi}{2} \times 2 + \displaystyle\int_{-1}^1 \mathrm{Arctan}(e^{-x}) \times (-1)\,\mathrm{d}x$.

On pose $t = -x$. $x \mapsto -x$ est de classe C^1 sur $[-1, 1]$.

On note $\mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}x$.

Si $x = -1$ alors $t = 1$.

Si $x = 1$ alors $t = -1$.

Par le théorème du changement de variables, $I_7 = \pi + \displaystyle\int_1^{-1} \mathrm{Arctan}(e^t)\,\mathrm{d}t = \pi - I_7$.

Donc, $2I_7 = \pi$ *i.e.* $I_7 = \dfrac{\pi}{2}$.

Un système

Soit x, y des réels.

À la lecture de la première ligne, il semble intéressant de poser $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t+e^t \end{array}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}, f'(t) = 1 + e^t > 0$.

Ainsi, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $f(x) = f(y) \iff x = y$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\begin{cases} x + e^x = y + e^y \\ x^2 + xy + y^2 = 27 \end{cases} &\iff \begin{cases} f(x) = f(y) \\ x^2 + xy + y^2 = 27 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = y \\ 3x^2 = 27 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = y \\ x^2 = 9 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = y \\ x = -3 \text{ ou } x = 3 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble solution du système est } \{(3,3), (-3,-3)\}.}$

Une équation

On constate que 2 est une solution évidente.

Pour montrer qu'il y a unicité, on peut penser à traduire l'équation sous la forme $f(x) = \text{cste}$ et voir s'il y a une stricte monotonie.

Première idée, poser $f : x \mapsto 3^x + 4^x - 5^x$.

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{x \ln 3} + e^{x \ln 4} - e^{x \ln 5}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et, pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) = \ln 3 e^{x \ln 3} + \ln 4 e^{x \ln 4} - \ln 5 e^{x \ln 5}$.

Le problème : le signe de $f'(x)$ n'est pas clair !

Pour contourner le problème, on peut essayer de travailler sur une fonction à variations plus simples : on reformule l'équation :

$$3^x + 4^x = 5^x \iff \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$$

On pose alors $f : x \mapsto \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x$.

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{x \ln\left(\frac{3}{5}\right)} + e^{x \ln\left(\frac{4}{5}\right)}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et, pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) = \ln\left(\frac{3}{5}\right) e^{x \ln\left(\frac{3}{5}\right)} + \ln\left(\frac{4}{5}\right) e^{x \ln\left(\frac{4}{5}\right)}$.

Comme $\exp > 0$ et $\ln\left(\frac{3}{5}\right) < 0$ et $\ln\left(\frac{4}{5}\right) < 0$ (car $\ln x < 0$ lorsque $x \in]0,1[$), on en déduit que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, pour x, y réels, $f(x) = f(y) \iff x = y$. Ici, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) = 1 &\iff f(x) = f(2) \\ &\iff x = 2 \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{il y a une unique solution à l'équation : le nombre 2}}$.

Une devinette

On note x le narrateur, $y_1, \dots, y_n$ ses sœurs et $z_1, \dots, z_n$ ses frères avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit alors y_j une des sœurs de x.

Si x est une fille alors y_j possède n sœurs et n frères : exclu par l'énoncé. Donc x est un garçon.

Alors, y_j possède $n - 1$ sœurs et $n + 1$ frères. Par l'énoncé, $n + 1 = 2(n - 1)$ i.e. $n = 3$.

La fratrie contient $2n + 1$ membres donc $\boxed{\text{7 membres au total}}$.

Un peu de logique

❶ $\forall x \in C, \forall y \in C, x \heartsuit y$.

❷ $\forall x \in C, \forall y \in C, x \cancel{\heartsuit} y$.

❸ $\forall x \in C, x \cancel{\heartsuit} x$.

❹ $\forall x \in C, \exists y \in C, x \heartsuit y$

❺ $\forall x \in G, \forall y \in G, \forall z \in F, (x \heartsuit z \text{ et } y \heartsuit z) \implies x \cancel{\heartsuit} y$

❻ $\exists x \in C, \exists y \in C, x \heartsuit y \text{ et } y \cancel{\heartsuit} x$.

❼ $\exists x \in C, \exists y \in C, x \heartsuit y \text{ et } y \heartsuit x$.

❽ $\forall x \in C, \forall y \in C, \forall z \in C, (x \heartsuit y \text{ et } y \heartsuit z) \implies x \heartsuit z$.

❾ $\exists x \in G, (\forall y \in C, y \leq x) \text{ et } (\forall z \in F, x \heartsuit z)$.