PROGRAMMES 13 et 14.

PROGRAMME 13 : du 15/01 au 19/01

Reprise des DL

DL : fin

- ★ DL d'un inverse, d'un quotient en 0.
- ★ DL en un réel x_0.
- ★ Exemple d'utilisation : recherche d'asymptotes obliques avec les positions relatives locales. Aussi en TD, utilisation des DL pour calculer des limites.

Ensembles et applications

- ★ Appartenance, inclusion. Sous-ensembles (ou parties) d'un ensemble, ensemble vide.
- ★ Opérations sur les parties d'un ensemble : réunion, intersection, complémentaire. Notations $\overline{A}$, A^c, $E \setminus A$. Lien entre connecteurs logiques et opérations ensemblistes.
- ★ Recouvrement disjoint d'un ensemble E (famille $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ de parties de E, 2 à 2 disjointes, de réunion E. Partition (recouvrement + chaque F_i est non vide).
- ★ Produit cartésien de deux ensembles, d'un nombre fini d'ensembles.
- ★ Ensemble des parties d'un ensemble.
- ★ Application d'un ensemble E dans un ensemble F ; graphe d'une application. Notations $\mathcal{F}(E, F)$ pour l'ensemble des applications de E dans F.
- ★ Restriction. Notation $f_{|A}$.
- ★ Composition. Injection, surjection. Composée de deux injections, de deux surjections.

Remarque aux colleurs : Les exercices sur les ensembles doivent rester basiques.

Un énoncé au choix à demander

- ❒ Définition d'un $DL_n(0)$.
- ❒ Troncature d'un DL.
- ❒ Interprétation d'un développement asymptotique de la forme $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} ax + b + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$, $c \neq 0$.
- ❒ Définition d'une inclusion d'ensembles.
- ❒ Définition de $\mathcal{P}(E)$.
- ❒ Recouvrement disjoint, partition.
- ❒ Opérations sur les parties d'un ensemble E, propriétés.
- ❒ Définition d'une restriction, d'un prolongement.
- ❒ Définition d'une injection, surjection.

DÉMONSTRATIONS

Avant la preuve, on demandera à chaque étudiant trois DL usuels en 0 *à un* <u>*petit*</u> *ordre.*

- ❒ *Exercice fait en cours* : On note $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1} e^{\frac{1}{x}}$.
  Montrer que la courbe de f admet en $+\infty$ une asymptote et étudier les positions relatives.
- ❒ Soit A, B, C des parties d'un ensemble E.
  Alors, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (*démonstration par double inclusion).*
- ❒ Composée de deux applications injectives ou composée de deux applications surjectives.

PROGRAMME 14 : du 22/01 au 26/01

Reprise des DL

Reprise des ensembles/applications et fin

★ Bijection, réciproque. Composée de deux bijections, réciproque de la composée.

★ Image directe. Notation $f(A)$.

★ Image réciproque. Notation $f^{-1}(B)$. Mais en cours on utilise temporairement la notation $f^{\leftarrow}(B)$ et on parle du « tiré en arrière » de B par f.

Limites et continuité : le tout début

★ Étant donné un point a appartenant à I ou extrémité de I, limite finie ou infinie d'une fonction en a. Limite finie ou infinie d'une fonction en $\pm\infty$. Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges.

★ Unicité de la limite. Si f admet une limite finie en a alors f est bornée au voisinage de a.

★ Limite à droite, limite à gauche. Extension de la notion de limite en a lorsque la fonction est définie sur $I \setminus \{a\}$.

★ Opérations sur les fonctions admettant une limite finie ou infinie en a. Image d'une suite de limite a par une fonction admettant une limite en a. Stabilité des inégalités larges par passage à la limite. Théorèmes d'encadrement (limite finie), théorème correspondant pour limites infinies (avec une inégalité). Théorème de la limite monotone.

Un énoncé au choix à demander

❒ Interprétation d'un développement asymptotique de la forme
$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} ax + b + \dfrac{c}{x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $c \neq 0$.

❒ Définition d'une inclusion d'ensembles.

❒ Définition de $\mathcal{P}(E)$.

❒ Recouvrement disjoint, partition.

❒ Opérations sur les parties d'un ensemble E, propriétés.

❒ Définition d'une restriction, d'un prolongement.

❒ Définition d'une injection, surjection, bijection.

❒ Définition de f^{-1} lorsque f est bijective.

❒ Composée de deux applications injectives, surjectives, bijectives. Formule donnant la réciproque de la composée en cas de bijectivité.

❒ Définition d'une image directe, d'un tiré en arrière.

❒ Définition mathématique d'une limite.

❒ Limite à gauche, à droite en un point.

❒ Passage à la limite.

❒ Théorème d'encadrement.

❒ Limite d'une fonction croissante sur $[a, b[$ (étude en b).

Démonstrations

- ❐ *Exercice fait en cours* : On note $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}e^{\frac{1}{x}}$.
  Montrer que la courbe de f admet en $+\infty$ une asymptote et étudier les positions relatives.
- ❐ Soit $f : E \to F, g : F \to E$.
  Si $f \circ g = \mathrm{id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{id}_E$ alors f et g sont bijectives et réciproques l'une de l'autre.
- ❐ *Exercice classique* : Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$.
  Si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
  Si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.