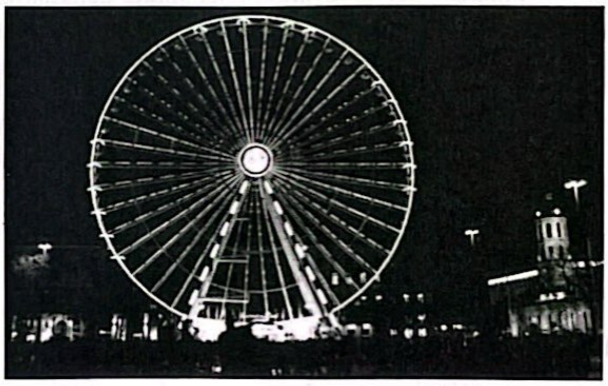
Mécanique MC1 Cinématique



Historique

Antiquité : Archimède : Hydrostatique, notion de centre de gravité (250 avant JC).
XVI^e : Copernic : description cinématique du système solaire.
Kepler : mouvement des planètes.
Galilée : principe d'inertie, principe de relativité galiléenne.
XVII^e : Huygens : Mouvements de rotation.
Newton : Les trois lois de la dynamique classique.

I Introduction à la mécanique

1.) Définitions

Mécanique : Etude du mouvement des systèmes matériels. (solide, ensemble de solide, syst déf)

Cinématique : Description du mouvement des corps, indépendamment des causes qui le provoquent.
(on ne prend pas en compte la masse)

Dynamique : Etude des relations entre les causes du mouvement et leurs effets.

On ne s'intéresse qu'au solide

2.) Hypothèses de la mécanique newtonienne

1. Possibilité au moins théorique de connaître avec une précision illimitée la position et la vitesse d'un corps à un instant donné.
2. Le temps se déroule de la même façon quel que soit le mouvement du corps considéré (hypothèse d'un temps absolu).

1. La mécanique quantique rejette la première hypothèse (1923-26 Principe de Heisenberg et Dualité onde-particule De Broglie, Heisenberg, Schrödinger et Born).

Il est impossible de connaître avec une précision illimitée la position et la vitesse d'un corps à un instant donné. (Heisenberg)
A toute particule en mouvement on associe une onde. (Dualité)

Pour un système de particules espacées de d, la mécanique classique est une bonne approximation si $\lambda << d$.

(particules microscopiques subissent la méca quantique)

2. La théorie de la relativité (restreinte) Einstein 1905 rejette la deuxième hypothèse.

Le déroulement du temps dépend du mouvement du système considéré.
La mécanique classique reste une bonne approximation si $v << c$ où v est la vitesse du corps considéré, et c la vitesse de la lumière dans le vide ($c = 3.10^8$ m.s^{-1}).

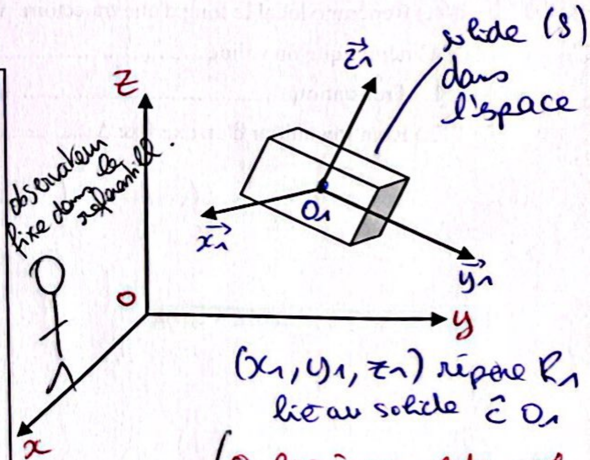
3.) Repérage dans l'espace et le temps

Solide : Corps supposé indéformable. Les distances entre deux points quelconques de (S) ne varient pas au cours du temps.

Mouvement et solide de référence

Pour repérer la position d'un solide dans l'espace, il faut choisir un solide de référence (S_{ref}), c'est-à-dire un objet physique par rapport auquel on étudie le mouvement.

Pour repérer un solide dans l'espace, il faut six paramètres :
- trois coordonnées d'un point du solide O_1 : On prend parfois le centre de gravité G du solide.
- trois angles qui définissent l'orientation des axes du repère $\Re_1$ lié au solide, par rapport au repère lié au solide de référence.



(x_1, y_1, z_1) repère R_1 lié au solide en O_1

ref (O lié à un solide ref.
(x, y, z) repère R lié au solide de réf.

Exemple Mouvement d'un ballon dans 1 wagon de train

On peut le décrire par rapport à ≠ référentiels.
mvt d'un ballon / gare
ou / wagon
ou / soleil.
Le mvt dépend de la position de l'observateur

Point matériel M(m) : Point géométrique M, auquel on associe une masse m. Corps assez petit pour que sa position puisse être définie à l'aide de trois coordonnées seulement.

ex : Mouche M(m)

Repère espace-temps : $= R(O, x, y, z) = R(O, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$

Repère d'espace $\Re(O, e_x, e_y, e_z)$ Point M repéré par (x,y,z). O point arbitraire du repère lié à (S_{ref}). Base cartésienne définie par trois points fixes appartenant à (S_{ref}).

Trajectoire : Ensemble des points de l'espace occupés par l'objet ponctuel M au cours de son déplacement, ou par G, le centre de gravité du solide considéré.

Repère de temps : {date origine + horloge de référence}

Horloge de référence : permet de mesurer la durée entre deux événements. On mesure le nombre de fois que se produit un phénomène cyclique.

**** **Référentiel : {repère d'espace lié à un solide de référence + repère temporel}**

= Observateur muni d'une horloge

Dans un référentiel, un événement (M,t) est défini par les paramètres (x,y,z,t) = point de l'espace-temps.

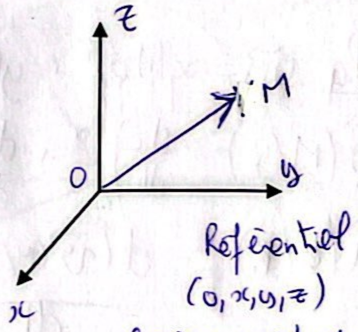
Unité de longueur : le mètre. Unité de temps : la seconde. (Voir poly "les grandeurs mesurables")

II Cinématique du point

1.) Vecteurs vitesse et accélération

Pour un point M en mouvement par rapport à un référentiel $\Re$ de centre O :

L'observateur est lié à $\Re$ et regarde M.



Référentiel (O,x,y,z)

lié à un solide de ref.

Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ (m)

par rapport au référentiel $\Re$.

Vecteur vitesse instantanée : $\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{\Re} = \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left.\frac{d\vec{\ell}}{dt}\right)_{\mathcal{R}}$ (m/s)

Déplacement élémentaire : $\overrightarrow{dl} = \overrightarrow{MM'}$

Vecteur accélération instantanée : $\vec{a}(M/\Re) = \left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{\Re} = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)_{\Re}$ $(m.s^{-2})$ $(\Delta t \to 0$ noté $dt)$

On peut exprimer ensuite ces vecteurs dans différentes bases locales, ou repères de projection.

Rq1 On dérive par rapport à un référentiel R. Pendant la dérivation, on considère que O et les vecteurs (ou axes) liés au référentiel sont fixes (ou constants)

Rq2 M à l'instant $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

M' à l'instant $t' = t + dt$

$M'\begin{pmatrix} x + dx \\ y + dy \\ z + dz \end{pmatrix}$ en coordonnées cartésiennes

$\overrightarrow{MM'}$: petit déplacement entre 2 points extrêmement proche

$\Rightarrow \overrightarrow{MM'}$ est tangent à la trajectoire au point M.

2.) Coordonnées cartésiennes

Base orthonormée directe $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$: • $\|\vec{e_x}\| = \|\vec{e_y}\| = \|\vec{e_z}\| = 1$

• $\vec{e_x} \perp \vec{e_y}$ $\vec{e_y} \perp \vec{e_z}$ $\vec{e_z} \perp \vec{e_y}$

• $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ forment un trièdre direct

(tire-bouchon / 3 doigts main droite)

notée aussi $(\vec{u_x}, \vec{u_y}, \vec{u_z})$

M a pour coordonnées (x, y, z). M décrit tout l'espace pour (x, y, z) ∈] −∞;+∞[

Repère orthonormé $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ lié au référentiel : $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ sont indépendants de M, donc du temps. donc constants.

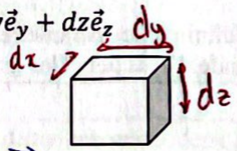
Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$

Vecteur vitesse : $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$

Vecteur accélération : $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$

Déplacement élémentaire : $\overrightarrow{dl} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$

Volume élémentaire : dV=dx×dy×dz.



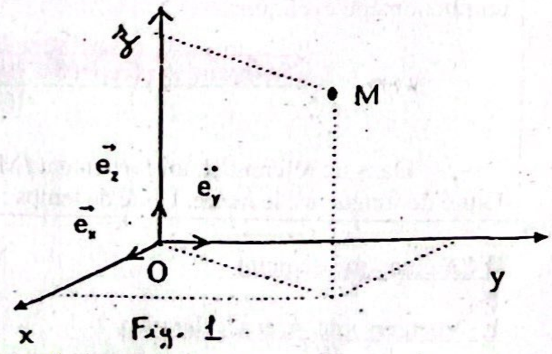


Fig. 1

Eq $\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{e_x} + y(t)\vec{e_y} + z(t)\vec{e_z}$

$\vec{v}(M/R) = \left.\frac{dx}{dt}\right)_R \vec{e_x} + \left.\frac{dy}{dt}\right)_R \vec{e_y} + \left.\frac{dz}{dt}\right)_R \vec{e_z}$ $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ constants.

$\vec{a}(M/R) = \frac{d(\vec{v}(M/R))}{dt} = \left.\frac{d^2x}{dt^2}\right)_R \vec{e_x} + \left.\frac{d^2y}{dt^2}\right)_R \vec{e_y} + \left.\frac{d^2z}{dt^2}\right)_R \vec{e_z}$

Déplacement élémentaire :

$\overrightarrow{dl} = \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OM'}$

$= \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}$

Volume élémentaire.

Produit des 3 variations élémentaires des coordonnées d'espace

$\overrightarrow{OM} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}$

$\overrightarrow{OM'} = (x+dx)\vec{e_x} + (y+dy)\vec{e_y} + (z+dz)\vec{e_z}$

$\Rightarrow \overrightarrow{dl} = dx\,\vec{e_x} + dy\,\vec{e_y} + dz\,\vec{e_z}$

$\vec{v}(M/R) = \frac{\overrightarrow{dl}}{dt} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{dt}$ on retrouve l'expression de la vitesse.

dx, dy, dz variations élémentaires de chaque coordonnée

$\lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right) = \frac{dx}{dt}$

3.) Coordonnées cylindriques

Base orthonormée directe instantanée $\left(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z\right)$.

$\vec{e}_\rho$ vecteur unitaire radial,

$\vec{e}_\theta$ vecteur unitaire orthoradial.

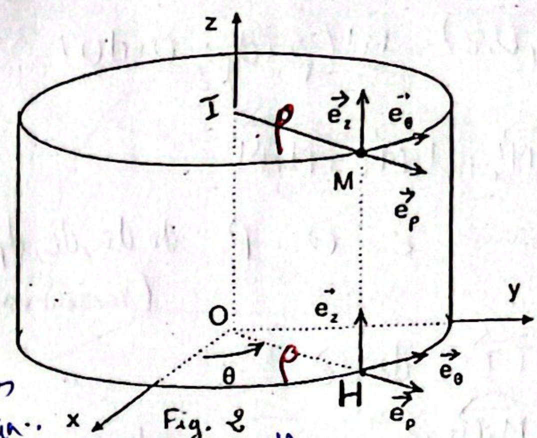


Fig. 2

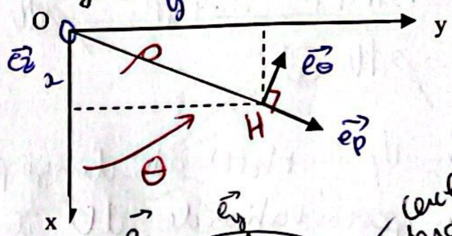
H projection orthogonale de M sur (Oxy).
I projection orthogonale de M sur (Oz).

rayon polaire $\quad \rho = OH \quad \overrightarrow{OH} = \rho\vec{e}_\rho$

angle polaire $\quad \theta = \left(\vec{e}_x, \vec{e}_\rho\right)$

cote $\quad z = \overline{OI} = \overline{HM} \quad \overrightarrow{HM} = z\vec{e}_z$

} coordonnées polaires définies dans le plan..

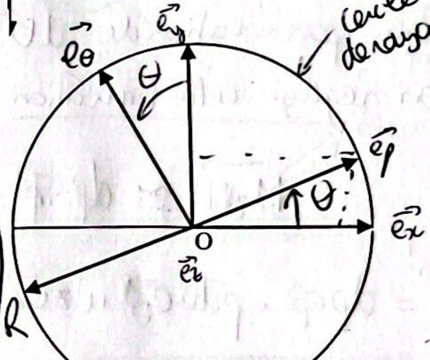


M (ρ, θ, z) où $\rho \in [0; +\infty[$; $\theta \in [0; 2\pi[$; $z \in]-\infty; +\infty[$

$M(r, \theta, z)$

Relations avec les coordonnées cartésiennes :

$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta, \quad z = z.$



Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z$

Vecteur vitesse : $\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$

Vecteur accélération : $\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z$

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta \qquad \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_\rho$$

Rq $x = \rho\cos\theta \quad y = \rho\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \rho\sin(\theta)$

• $\vec{v}(M/R) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R = \frac{d\rho}{dt}\vec{e}_\rho + \rho\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z$

($\vec{e}_z$ cst)

⚠ $\vec{e}_\rho(\theta(t))$ $\quad \frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \frac{d\vec{e}_\rho}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt}$

$\vec{e}_\rho = \cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y$

$\frac{d\vec{e}_\rho}{d\theta} = -\sin\theta\vec{e}_x + \cos\theta\vec{e}_y$

$\vec{e}_\theta = \cos\theta\vec{e}_y - \sin\theta\vec{e}_x \Rightarrow \frac{d\vec{e}_\rho}{d\theta} = \vec{e}_\theta$

$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$

$\vec{v}(M/R) = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$

$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt}$

$\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\sin\theta\vec{e}_y - \cos\theta\vec{e}_x = -\vec{e}_\rho$

$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_\rho$

• $\vec{a}(M/R) = \left.\frac{d\vec{v}(M/R)}{dt}\right|_R$

$= \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \rho\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + \rho\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} + \ddot{z}\vec{e}_z$

$= (\ddot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{e}_\theta) + (\dot{\rho}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \rho\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - \rho\dot{\theta}^2\vec{e}_\rho) + \ddot{z}\vec{e}_z$

$\vec{a}(M/R) = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z$

6 Déplacement élémentaire.

$M(\rho,\theta,z)$ $M'(\rho+d\rho,\ \theta+d\theta)$

$$\vec{d\ell} = \underbrace{\vec{MM_1}}_{z} + \underbrace{\vec{M_1M_2}}_{\theta} + \underbrace{\vec{M_2M'}}_{\rho}$$

On fait varier z θ ρ de $dz, d\theta, d\rho$.
(tendent vers 0)

$\vec{MM_1} = \vec{II'} = dz\,\vec{e_z}$

$\vec{M_1M_2} = \widehat{M_1M_2}\,\vec{e_\theta}$ où $\widehat{M_1M_2} = \rho d\theta$
$= \rho d\theta\,\vec{e_\theta}$

$M_2M' = d\rho$. M_2M' est dirigé par un vecteur obtenu par rotation de $d\theta$ (de centre I) ($\vec{e_\rho}$)

on néglige cette variation

$$\vec{M_2M'} \simeq d\rho\,\vec{e_\rho}$$

$\vec{d\ell} = d\rho\,\vec{e_\rho} + \rho d\theta\,\vec{e_\theta} + dz\,\vec{e_z}$

$\vec{v}(M/R) = \dfrac{\vec{d\ell}}{dt}$

$= \dfrac{d\rho}{dt}\vec{e_\rho} + \rho\dfrac{d\theta}{dt}\vec{e_\theta} + \dfrac{dz}{dt}\vec{e_z}$

$\vec{v}(M/R) = \dot{\rho}\,\vec{e_\rho} + \rho\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} + \dot{z}\,\vec{e_z}$

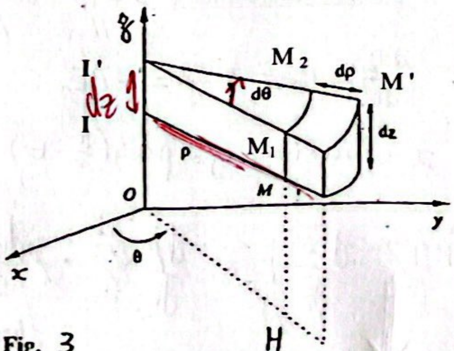
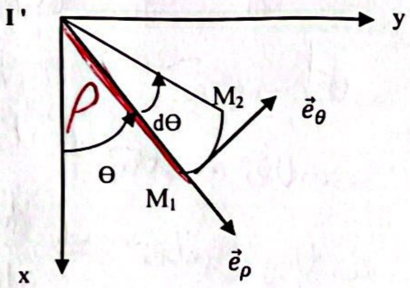


Fig. 3



Déplacement élémentaire $\vec{dl} = \vec{dr} = d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\theta\vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z$
Volume élémentaire dV=dρ×ρdθ×dz.

$M = \iiint \rho(M)\,dV$

⚠ θ et φ sont échangés /SI

4.) Coordonnées sphériques (fig. 4)

Base orthonormée directe instantanée $\left(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi}\right)$:

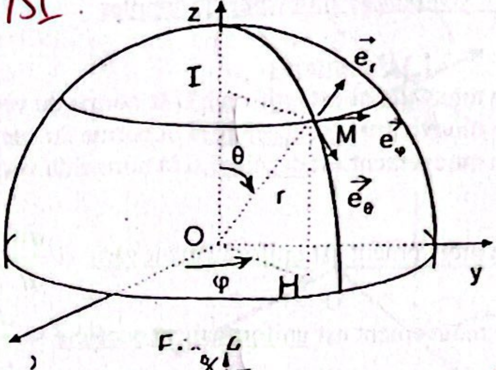
H projection orthogonale de M sur (Oxy).

r = OM. > 0

colatitude $\theta = \left(\vec{e_z}, \overrightarrow{OM}\right)$

longitude $\varphi = \left(\vec{e_x}, \overrightarrow{OH}\right)$

M (r, θ, φ) où r ∈ [0; +∞[; θ∈ [0; π]; φ∈ [0; 2π[



Vecteur position :. $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r\vec{e}_r$

Relations avec les coordonnées cartésiennes : $\overline{OH} = \overline{IM} = r\sin\theta$

$x = \overline{OH}\cos\varphi = r\sin\theta\cos\varphi$

$y = \overline{OH}\sin\varphi = r\sin\theta\sin\varphi$

$z = \overline{OI} = r\cos\theta.$

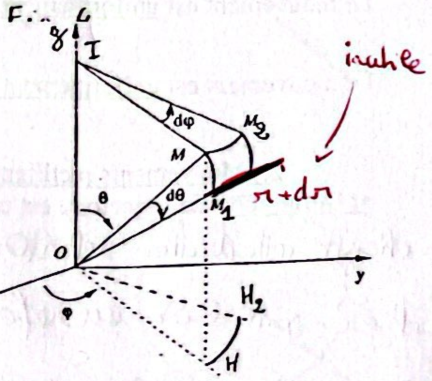


Fig. 5

$\begin{cases} OI = r\cos\theta \\ OH = r\sin\theta \end{cases}$ $\quad x = OH\cos\varphi = r\sin\theta\cos\varphi$

$y = OH\sin\varphi = r\sin\theta\sin\varphi.$

$\vec{d\ell} = \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M_2'} + \overrightarrow{M_2'M'}$

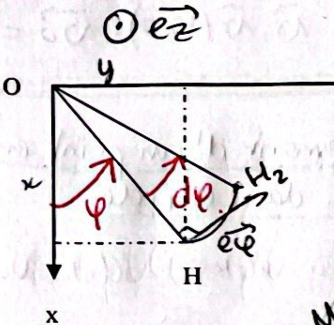
on fait varier θ φ r

de dθ de dφ de dr.

on calcule les variations en partant du point M.

$\vec{d\ell} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{MM_2} + \overrightarrow{MM_3}$

θ φ r.

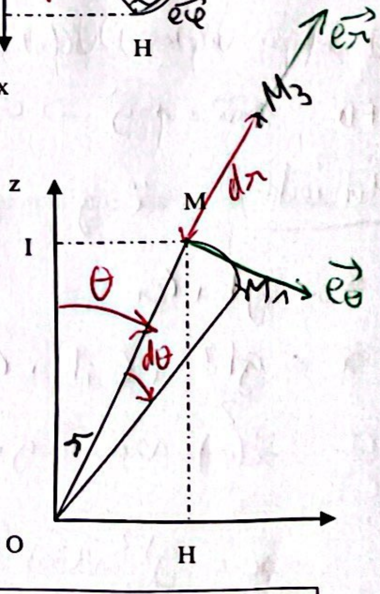


$\overrightarrow{MM_3} = dr\,\vec{e_r}$

$MM_1 = r\,d\theta \quad \overrightarrow{MM_1} = r\,d\theta\,\vec{e_\theta}$

$\overrightarrow{MM_2} = \widehat{HH_2} = \widehat{HH_2} \times \ell\ell = OH\,d\varphi\,\vec{e_\varphi}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MM_2} \Rightarrow r\sin\theta\,d\varphi\,\vec{e_\varphi}$



d'où $\vec{d\ell} = dr\,\vec{e_r} + r\,d\theta\,\vec{e_\theta} + r\sin\theta\,d\varphi\,\vec{e_\varphi}$

$\overrightarrow{v(M/R)} = \frac{\vec{d\ell}}{dt} = \dot{r}\,\vec{e_r} + r\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} + r\sin\theta\,\dot{\varphi}\,\vec{e_\varphi}$

Déplacement élémentaire : $\overrightarrow{dl} = \overrightarrow{dr} = dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta + r\sin\theta d\varphi\vec{e}_\varphi$

Surface élémentaire : dS=rdθ×rsinθdφ (fig. 5).

Volume élémentaire : dV=dS×dr=dr×rdθ×rsinθdφ

L'accélération en sphérique est donnée en cas de besoin

III Exemples de mouvements simples

1.) Définitions

Un mouvement est uniforme si la norme du vecteur vitesse est constante. $\|\vec{v}\| = cste$.
Un mouvement est accéléré si la norme du vecteur vitesse augmente. $\|\vec{v}\| \nearrow$
Un mouvement est décéléré si la norme du vecteur vitesse diminue. $\|\vec{v}\| \searrow$

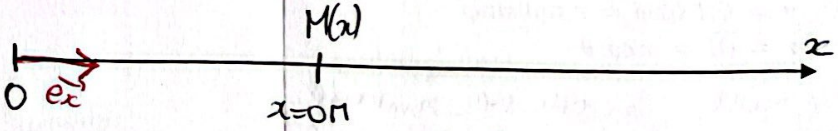
Un mouvement est uniformément varié si $\frac{dv}{dt}$ est constante.

Le mouvement est uniformément accéléré si $\frac{dv}{dt} = cste > 0$.

Le mouvement est uniformément décéléré si $\frac{dv}{dt} = cste < 0$.

2.) Mouvements rectilignes

a) Définition : La trajectoire est une droite.



On choisit cette droite selon (Ox)

O et $\vec{e_x}$ sont liés au référentiel, donc fixe (cst lors de la dérivation)

$\vec{OM} = x\vec{e_x}$, $\vec{v} = \dot{x}\vec{e_x}$, $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e_x}$
$= \vec{x}$

Mouvement rectiligne Uniforme
↳ $\vec{v} = \vec{v}(t=0) = \vec{v_0} = v_0\vec{e_x}$

$\Rightarrow \dot{x} = v_0 \Rightarrow \ddot{x} = 0$ $\quad \vec{a} = \vec{0}$

$x = v_0 t + cste$.

CI $x(0) = 0 \Rightarrow cste = 0 \Rightarrow \boxed{x = v_0 t}$.

$\vec{OM} = v_0 t\,\vec{e_x}$

b) Exemple : Mouvement de vecteur accélération constante

Mouvement d'un point en chute libre dans le vide

CI à $t=0$ $\quad x(0)=0 \quad \dot{x}(0) = v_0$

LFD $\quad m\vec{a} = m\vec{g} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$] cf MC2 syna

Mvt rectiligne $\quad \ddot{x} = g \quad$ mvt rectiligne uniformément varié

$\dot{x} = gt + C_1$

$x = \frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2$

CI $\quad \dot{x}(0) = v_0 \quad g\times 0 + C_1 = v_0$
$\Rightarrow C_1 = v_0$

$x = \frac{gt^2}{2} + v_0 t + C_2$

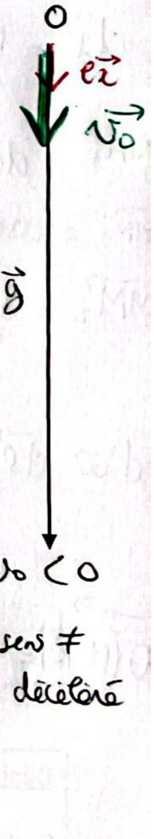
$x(0) = 0 \quad \frac{g\times 0}{2} + v_0\times 0 + C_2 = 0$
$\Rightarrow C_2 = 0$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$

$\vec{a} = g\vec{e_x}$

$\vec{v} = (gt + v_0)\vec{e_x}$

$\vec{OM} = (\frac{gt^2}{2} + v_0 t)\vec{e_x}$



Si on lance M vers le bas.

$\vec{v_0}$ et $\vec{a}$ sont de même sens. $\quad v_0 > 0$

$\Rightarrow$ Mvt rectiligne uniformément accéléré (dessin)

Si on lance M vers le haut $\quad v_0 < 0$

1ère phase du mvt | $\vec{v_0}$ et $\vec{a}$ en sens ≠
| Mvt unifo. décéléré

2e phase du mvt = chute
⇓
mvt unifo. accéléré.