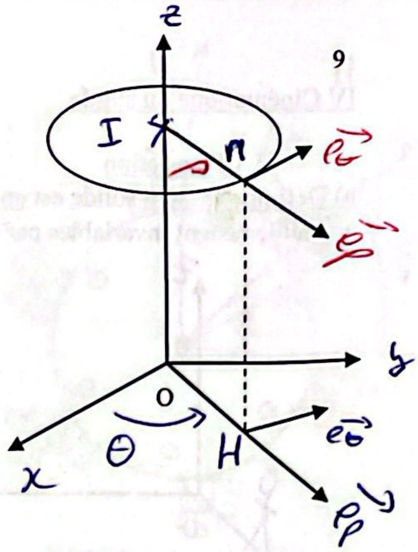


3.) Mouvements circulaires

a) Définition La trajectoire est un cercle de rayon R, centré sur I, d'axe (Oz).

coordonnées cylindriques :

$\rho = OH = IH = R = cte$.

$z_I = \overline{OI} = \overline{HM} = cste$

b) Exemple : Mouvement circulaire non uniforme :

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} = R\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z$

$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta = R\omega\vec{e}_\theta = v\vec{e}_\theta$ où $\omega = \dot{\theta}$ est la vitesse angulaire.

$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_\theta - \frac{v^2}{R}\vec{e}_\rho$

à redémontrer à chaque fois.

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} = R\vec{e_\rho} + z\vec{e_z}$

$\vec{v}(M/R) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\Big|_R$

(O, x, y, z) lié à R.

$\vec{v}(M/R) = R\frac{d\vec{e_\rho}}{dt}\Big|_R = R\dot{\theta}\vec{e_\theta}$

vitesse angulaire

$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$

$\vec{v}(M/R) = R\omega\vec{e_\theta}$

$\vec{v}(M/R) = v\vec{e_\theta}$

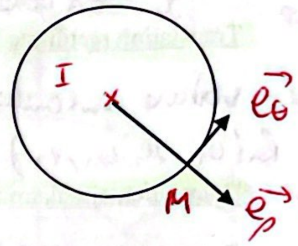
où $v = R\dot{\theta}$ (valeur algébrique)

$\vec{a}(M/R) = R\ddot{\theta}\vec{e_\theta} + R\dot{\theta}\frac{d\vec{e_\theta}}{dt}$

$\vec{a}(M/R) = R\ddot{\theta}\vec{e_\theta} - R\dot{\theta}^2\vec{e_\rho}$ *

$\vec{a}(M/R) = R\frac{d\omega}{dt}\vec{e_\theta} - R\omega^2\vec{e_\rho}$

$\vec{a}(M/R) = \frac{dv}{dt}\vec{e_\theta} - \frac{v^2}{R}\vec{e_\rho}$ ***



$\vec{a}(M/R) = \vec{a_t} + \vec{a_N}$

• accélération tangentielle suivant $\vec{e_\theta}$

$\vec{a_t} = \frac{dv}{dt}\vec{e_\theta}$ orientée dans le sens mvt

• accélération normale suivant $\vec{e_\rho}$

$\vec{a_N} = -\frac{v^2}{R}\vec{e_\rho}$ orientée vers le centre de la trajectoire = centripète.

Mouvement circulaire uniforme : v = Cte donc ω = Cte

$v = R\omega \quad \omega = \dot{\theta}$

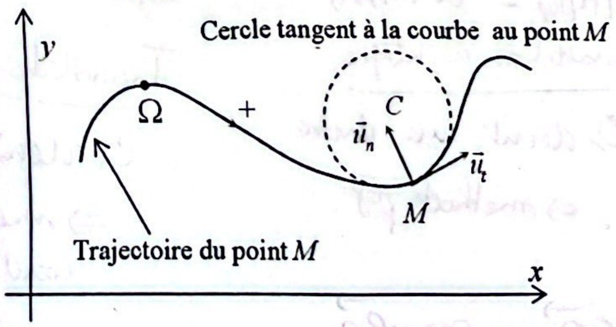
$\vec{v} = R\omega\vec{e}_\theta = v\vec{e}_\theta$

$\vec{a} = -R\omega^2\vec{e}_\rho = -\frac{v^2}{R}\vec{e}_\rho$

× pour accélération lorsque v et ω cstes.

4.) Repérage local le long d'une trajectoire plane : repère de Frenet

M se déplace le long d'une trajectoire dans le plan (xOy)



En un point M quelconque de la trajectoire, on définit :

$\vec{u}_t$: Vecteur unitaire tangent à la trajectoire, orienté dans le sens de parcours de la trajectoire.

$\vec{u}_n$: Vecteur unitaire normal à la trajectoire, dirigé vers l'intérieur de la courbure de la trajectoire.

Repère de Frenet : repère mobile $(M, \vec{u}_t, \vec{u}_n)$

Vitesse : $\vec{v} = v\vec{u}_t$

On assimile le mouvement au voisinage du point M à un mouvement circulaire quelconque sur le cercle osculateur (= cercle tangent localement au point M à la trajectoire, de centre C de rayon R).

R est appelé rayon de courbure de la trajectoire au point M.

Accélération : $\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t + \frac{v^2}{R}\vec{u}_n$

Cas particulier de trajectoire

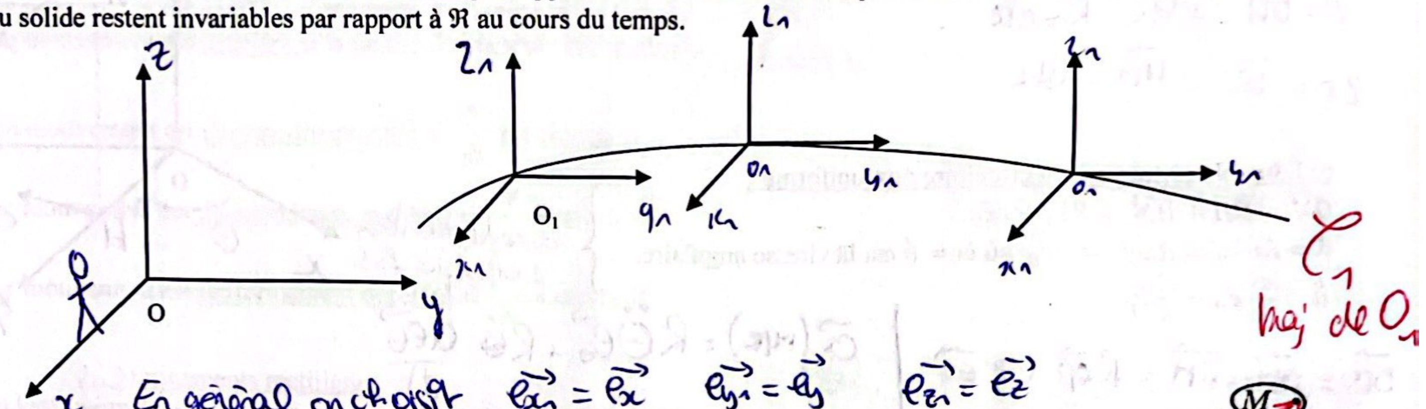
$\vec{u_t} = \vec{e_\theta}$

$\vec{u_n} = -\vec{e_\rho}$

IV Cinématique du solide

1.) Translation

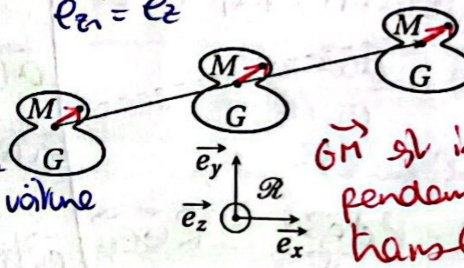
a) Définitions Un solide est en translation par rapport à un référentiel $\mathfrak{R}$ lorsque les vecteurs de base cartésiens liés au solide restent invariables par rapport à $\mathfrak{R}$ au cours du temps.



En général on choisit $\vec{e_{x1}} = \vec{e_x}$ $\vec{e_{y1}} = \vec{e_y}$ $\vec{e_{z1}} = \vec{e_z}$

Translation rectiligne : O_1 a une trajectoire rectiligne par rapport à $\mathfrak{R}$.

Ex : voiture sur autoroute
$R_1(O_1, x_1, y_1, z_1)$ lié au solide (voiture) avec O_1 centre de gravité de la voiture



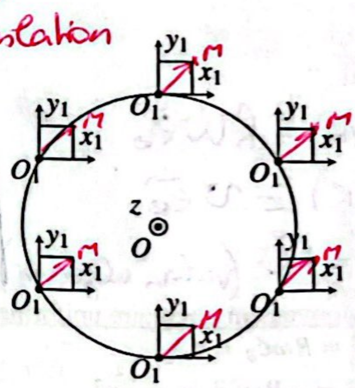
$\vec{GM}$ est invariant pendant la translation

Translation circulaire : O_1 a une trajectoire circulaire par rapport à $\mathfrak{R}$.

Translation

Exemple : Nacelle d'une grande roue.

$\vec{O_1M}$ est constant lors de la translation circulaire.



Translation circulaire.

$\vec{O_1M} = x_1\vec{e_{x1}} + y_1\vec{e_{y1}} + z_1\vec{e_{z1}}$

$(x_1, y_1, z_1) = cst$: car on a un solide

$(\vec{e_{x1}}, \vec{e_{y1}}, \vec{e_{z1}}) = cst$ / R.

$\vec{OM} = \vec{OO_1} + \vec{O_1M}$

$$\vec{v}(M/R) = \frac{d\vec{OM}}{dt}\Big|_R = \frac{d\vec{OO_1}}{dt}\Big|_R + \underbrace{\frac{d\vec{O_1M}}{dt}\Big|_R}_{=0} = \vec{v}(O_1/R)$$

$$\vec{a}(M/R) = \vec{a}(O_1/R)$$

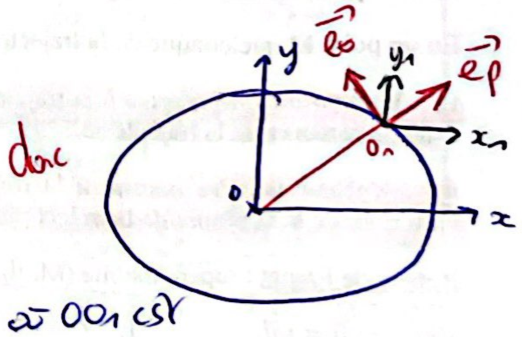
Translation rectiligne

O_1 décrit une droite
$\Rightarrow$ méthode p.8.

Translation circulaire

O_1 décrit un cercle
$\Rightarrow$ méthode p.3
coord. cylindriques.

donc



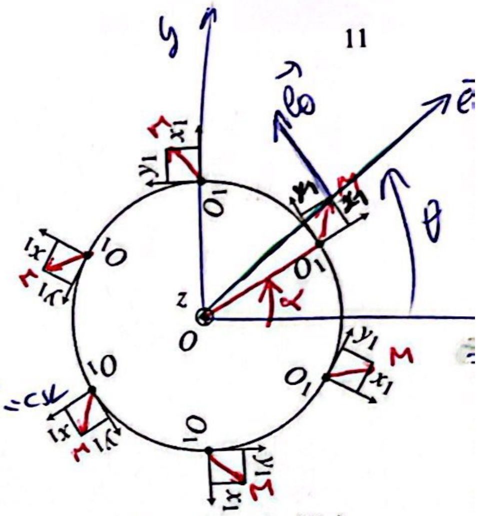
$\vec{OO_1} = OO_1\vec{e_\rho}$ où OO_1 cst

> **Tous les points d'un solide en translation ont même mouvement. Le mouvement du solide est complètement décrit par le mouvement d'un de ses points, par exemple le centre de gravité G.**

2.) Rotation autour d'un axe fixe Δ

Un solide est en rotation autour d'un axe fixe Δ si tous ses points sont en mouvement circulaire autour de Δ.

Exemple : Nacelle d'une grande roue qui s'est emballée.



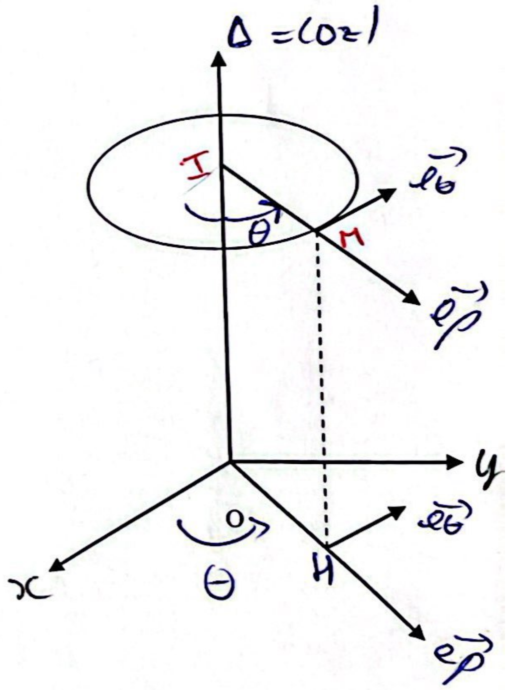
Rotation autour de (Oz).

$R(O_1, x, y, z)$ lié au solide (ex: nacelle) on étudie le mouvement / R fixe

Δ = (Oz) axe de rotation fixe on prend ici $\vec{e_{z_1}} = \vec{e_z} = cst$

⚠ $\vec{O_1M} \neq cst$ $M \in (S)$ solide (nacelle)

M décrit un cercle centré sur l'axe de rotation de centre sa projeté orthogonale sur Δ (notée I)



Coordonnées cylindriques pour M

$\vec{OM} = \vec{OI} + \vec{IM}$

$= z_I \vec{e_z} + R\vec{e_\rho}$ où $\begin{cases} z_I = cste \\ R = cste \end{cases}$

$\vec{v}(M/R) = R\dot{\theta}\vec{e_\theta}$

vitesse angulaire R_1/R_0 $\omega = \dot{\alpha}$

Or $\theta = \alpha + \alpha_0$ où α_0 est une cste. (car O_1 et $M \in$ solide)

$\Rightarrow \dot{\theta} = \dot{\alpha}$ or $\dot{\alpha} = \omega$

$\vec{v}(M/R) = R\omega\vec{e_\theta}$

R dépend du point M considéré

la vitesse de tous les points de (S) n'est pas identique (≠ translation)

Si on change M on change R et donc $\vec{v}$.

***

Vecteur rotation : $\vec{\Omega} = \omega\vec{e}_z$

- parallèle à l'axe de rotation, et suivant la règle du tire bouchon
- de norme la vitesse angulaire de rotation

Remarque : L'axe de rotation n'appartient pas forcément au solide.