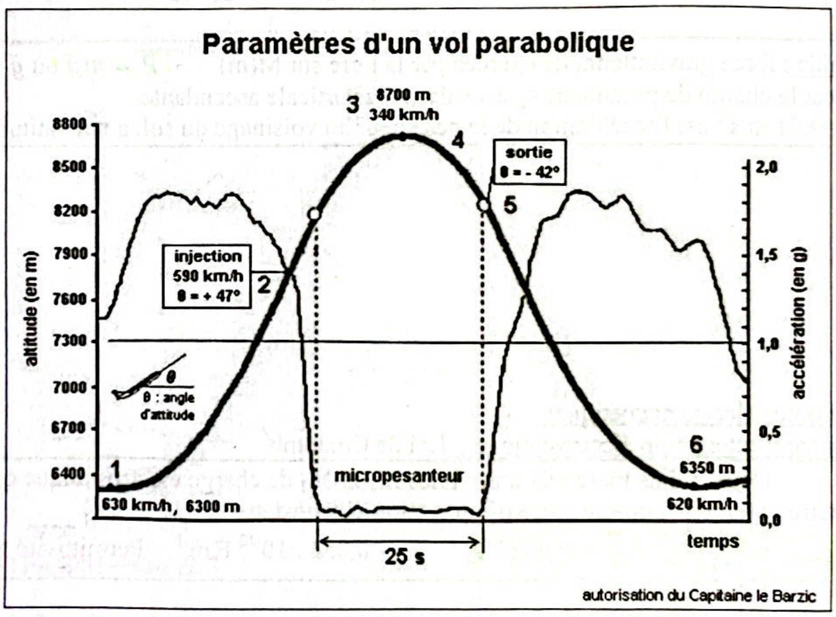
Mécanique MC2 Bases de la dynamique



Isaac Newton (1643–1727) est un mathématicien, physicien, philosophe, alchimiste, astronome et théologien anglais, puis britannique. Figure emblématique des sciences, il est surtout reconnu pour avoir fondé la mécanique classique, pour sa théorie de la gravitation universelle. En optique, il a développé une théorie de la couleur fondée sur l'observation selon laquelle un prisme décompose la lumière blanche en un spectre visible. Il a aussi inventé le télescope à réflexion composé d'un miroir primaire concave appelé télescope de Newton.

En mécanique, il a établi les trois lois universelles du mouvement qui constituent en fait des principes à la base de la grande théorie de Newton concernant le mouvement des corps, théorie que l'on nomme aujourd'hui « mécanique newtonienne » ou encore « mécanique classique ».

Newton a montré que les mouvements des objets sur Terre et des corps célestes sont gouvernés par les mêmes lois naturelles ; en se basant sur les lois de Kepler sur le mouvement des planètes[1], il développa la loi universelle de la gravitation.

Son ouvrage Philosophiae naturalis principia mathematica[2,3], publié en 1687, est considéré comme une œuvre majeure dans l'histoire des sciences. C'est dans celui-ci qu'il décrit la loi universelle de la gravitation, formule les trois lois universelles du mouvement et jette les bases de la mécanique classique. Il a aussi effectué des recherches dans les domaines de la théologie et de l'alchimie.

Hypothèse : On étudie uniquement des systèmes de masse constante.

I Forces

1.) Définition :

Une force peut : - mettre en mouvement un objet
- dévier la trajectoire d'un objet
- déformer un objet.

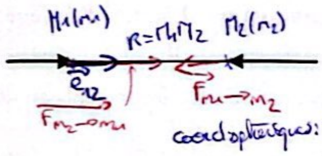
Une force est représentée par un vecteur $\vec{F}$. L'origine est le point d 'application de la force. La norme du vecteur donne la valeur de la force, avec une échelle appropriée. La direction et le sens sont ceux de la force.

2.) Forces à distance

a) Force d'interaction gravitationnelle : Loi d'attraction universelle (Newton 1687)

Deux points matériels M_1 et M_2 de masse gravitationnelle m_1 et m_2, et distants de r, exercent l'un sur l'autre une force attractive, appelée force d'interaction gravitationnelle :
$\vec{F}_{m_1\rightarrow m_2} = -\mathcal{G}\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{e}_{12} = m_2\vec{G}_1(M_2)$ $\mathcal{G} = 6{,}67.\ 10^{-11}$ N.m².kg⁻² Constante de gravitation

m_1, m_2 en kg.



coord polaires : si $O = M_1$ fixe $\vec{e}_{12} = \vec{e}_r$ cf MC6

Champ de gravitation créé par m_1 en M_2 : $\vec{G}_1(M_2) = -\mathcal{G}\frac{m_1}{r^2}\vec{e}_{12}$

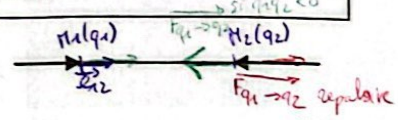
Poids : force gravitationnelle exercée par la terre sur M(m) $\vec{P} = m\vec{g}$ où $\vec{g} = -g\vec{e}_z$
$\vec{g}$ est le champ de pesanteur; $\vec{e}_z$ est suivant la verticale ascendante.
g =9,81 m.s⁻² est l'accélération de la pesanteur au voisinage du sol, à une latitude λ = 45°.

b)Forces électromagnétiques

- force d'interaction électrostatique : Loi de Coulomb

Deux points matériels immobiles M_1 et M_2 de charge électrostatique q_1 et q_2, et distants de r, exercent l'un sur l'autre une force, appelée force d'interaction électrostatique :
$\vec{F}_{q_1\rightarrow q_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{e}_{12} = q_2\vec{E}_1(M_2)$ $\varepsilon_0 = 8{,}854\ .\ 10^{-12}$ F.m⁻¹ Permittivité absolue du vide

q_1, q_2 en Coulomb.



Champ électrostatique créé par q_1 en M_2 : $\vec{E}_1(M_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r^2}\vec{e}_{12}$

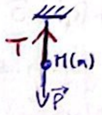
Particule en mouvement dans un champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$: elle est soumise à la force de Lorentz
$\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B})$

⚠ g dépend de l'altitude et de la latitude, supposé uniforme à la surface de la Terre pour la ...

3.) Tension et force de rappel

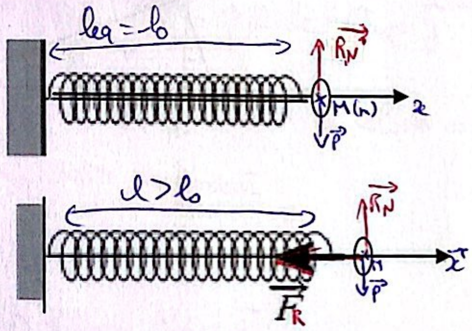
a) Tension d'un fil (T=0 si fil pas tendu)

Le point matériel accroché à un fil est soumis à une force appelée Tension du fil $\vec{T}$, colinéaire au fil, si le fil est tendu.



b) Force de rappel d'un ressort

L'anneau accroché au ressort est soumis à une force appelée Force de rappel du ressort $\vec{F}_r$:
k est la constante de raideur du ressort, l_0 sa longueur à vide, l sa longueur à l'instant considéré,
$\vec{F}_r = -k(l - l_0)\vec{e}_x$ où le vecteur unitaire $\vec{e}_x$ est dans le sens de l'allongement du ressort. On peut poser $x = l - l_0$



ressort à l'équilibre

Ressort hors équilibre

4.) Forces de contact (ou forces de liaison) exercées

a) par le support solide

Si un point matériel ou un solide est soumis à se déplacer sur une courbe ou une surface, cela se traduit par :
- des relations supplémentaires sur les coordonnées d'espace
- une force exercée par le support sur le point matériel, appelée Force de contact : $\vec{R} = \vec{R}_T + \vec{R}_N$

$\vec{R}_N$ est la réaction du support ou composante normale, elle est perpendiculaire au support.
$\vec{R}_T$ est la force de frottement solide ou composante tangentielle, elle est colinéaire (parallèle) et de sens opposé à la vitesse.

*** $||\vec{R}_T|| = f||\vec{R}_N||$ si v≠ 0 et $||\vec{R}_T|| \leq f_S||\vec{R}_N||$ sinon

$\begin{cases} f \text{ coef de frottement dynamique} \\ f_S \text{ " " " statique.} \end{cases}$

Ex : solide sur un plan incliné

1er cas : solide immobile

$\sum \vec{F} = \vec{0}$ donc $\vec{P}+\vec{R} = \vec{0}$

$\vec{P}+\vec{R_T}+\vec{R_N} = \vec{0}$

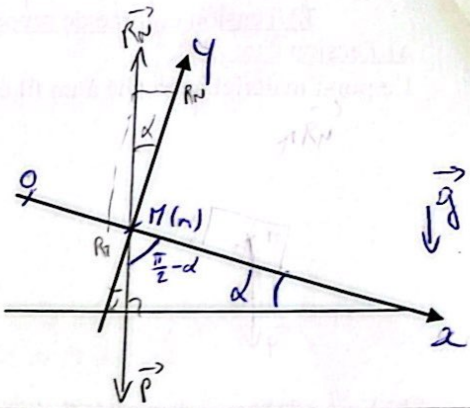
sur (Oy) : $\begin{cases} -mg\cos\alpha + R_N = 0 \\ mg\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) - R_T = 0 \end{cases}$ sur (Ox)

$\begin{cases} R_N = mg\cos\alpha \\ R_T = mg\sin\alpha \end{cases}$ donc $\frac{R_T}{R_N} = \tan\alpha$.

OR $R_T \leq f_S R_N$

donc $\boxed{\frac{R_T}{R_N} = \tan\alpha \leq f_S}$

f_S : coeff de frottement statique



2e cas : solide en mvt : on augmente α jusqu'à ce que M bouge

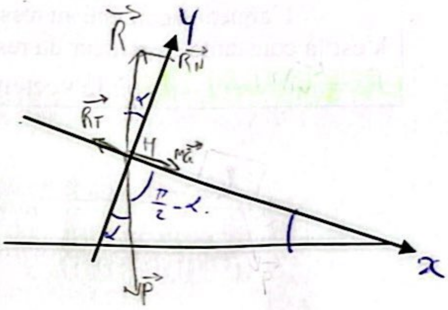
$\sum \vec{F} = m\vec{a}$

$\vec{R}+\vec{P} = m\vec{a}$

(Oy) : $\begin{cases} R_N - mg\cos\alpha = 0 \\ mg\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) - R_T = ma_x \end{cases}$ (Ox)

$\Rightarrow m\ddot{x} = mg\sin\alpha - R_T$

où $R_T = fR_N$ f : coef de frott dynamique



b) par un fluide

** **Force de frottement fluide** sur un corps en mouvement : $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$ où $\alpha > 0$ est le coefficient de frottement fluide.

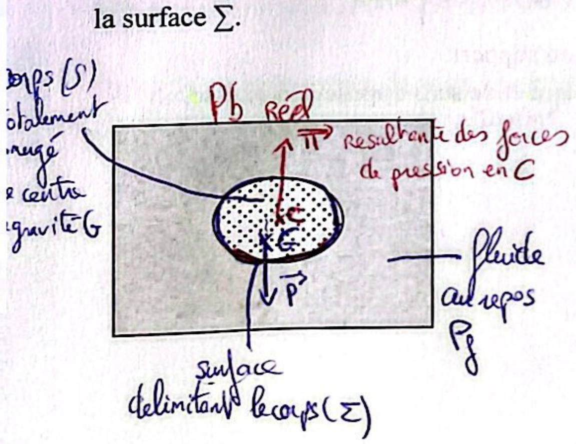
Rq : $\vec{F}$ peut s'écrire sous forme $-\alpha v \vec{v}$ (de norme $-\alpha v^2$)
Cela dépend de la viscosité du fluide et de la vitesse du solide.

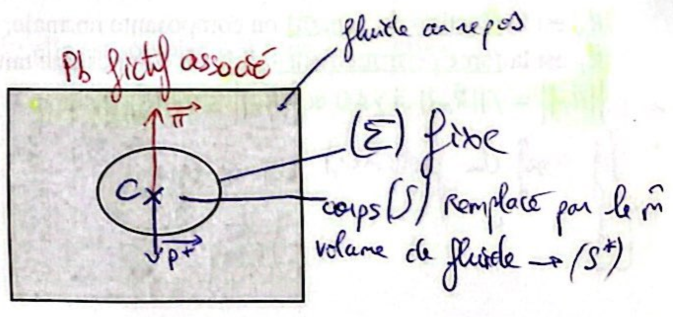
Poussée d'Archimède

Hypothèses   Fluide ou ensemble de fluides quelconques (inhomogène, compressible) au repos dans un référentiel galiléen, soumis au champ de pesanteur uniforme.

> Théorème d'Archimède : Les forces de pression exercées par un fluide, ou un ensemble de fluides, sur un corps totalement immergé sont équivalentes à une force unique, appelée Poussée d'Archimède égale à l'opposé du poids des fluides déplacés et appliquée au centre de poussée C (centre d'inertie du volume de fluide déplacé)
> $\vec{\Pi} = -m_{fluide\ déplacé}\vec{g} = -\rho_{fluide}V_{corps}\vec{g}$. ρ : masse volumique   V : volume du corps.

La pression augmente avec la profondeur : la pression est donc plus importante au niveau de la partie basse de la surface Σ.





Condition de validité du théorème d'Archimède

(cf Spé)

D'après la loi fondamentale de la statique des fluides, l'expression de la pression dans le fluide ne dépend que du champ de pesanteur. On admet que la pression exercée sur la surface Σ est la même dans les deux cas.

Pour le pb fictif

Le fluide ou ensemble de fluides est au repos donc (S^*), volume de fluide entouré par la surface (Σ) qui est au repos également.

Dans un ref galiléen: $\sum \vec{F} = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{\Pi} + \vec{P^*} = \vec{0}$

où $\vec{P^*} = m^*_{fluide} \times \vec{g} = \rho_{fluide} \times v_{corps} \vec{g}$ (à l'intérieur de Σ)

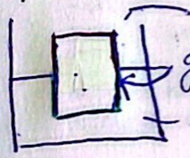
s'applique donc au centre d'inertie du volume de fluide donc en C : centre de poussée

$\Rightarrow \vec{\Pi} = -\vec{P^*}$

$\Rightarrow \vec{\Pi} = -\rho_{fluide}\, v_{corps}\, \vec{g}$

on admet que cette expression est valable pour le pb réel

Rq : corps flottant



glaçon en équilibre à l'interface air-eau

soumis à : • son poids $\vec{P} = \rho_{glace} \times V_{glaçon}\, \vec{g}$

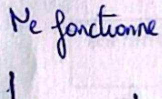
• poussée Archimède $\vec{\Pi} = \vec{\Pi}_{air} + \vec{\Pi}_{eau}$

$\vec{\Pi}_{eau} = -\rho_{eau}\, v_{glace\ immergée}\, \vec{g}$

$\vec{\Pi}_{air} = -\rho_{air}\, v_{glaçon\ émergé}\, \vec{g}$

⚠

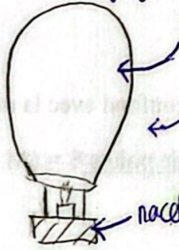
⚠ Ne fonctionne pas pour un corps au fond de l'eau



(n'est pas entouré de fluide car sol)

⇒ on calcule l'intégrale des forces de pression sur la surface

Ex : Montgolfière (s/o Hermine)



* Sujet : [ballon + nacelle]
* Ref : terrestre galiléen
* Forces : • $\vec{P} = m\vec{g} + \rho_{chaud}\, v\, \vec{g}$

• $\vec{\Pi} = -\rho_{froid}\, v\, \vec{g}$

au décollage : $m\vec{a} = \sum \vec{F}$

$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{\Pi}$

$= m\vec{g} + \rho_{chaud}\, v\vec{g} - \rho_{froid}\, v\vec{g}$

$m_T\vec{a} = (m + (\rho_{chaud} - \rho_{froid})v)\,\vec{g}$.

Pour que la montgolfière décolle, il faut que la résultante des forces soit dans le sens de $-\vec{g}$

soit : $m + (\rho_{chaud} - \rho_{froid})\, v < 0$

Dès que la montgolfière prend de la vitesse, frottements fluides pas négligeables

II Quantités de mouvement

1.) Définition

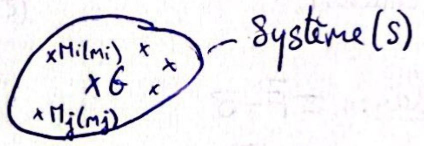
a) Quantité de mouvement du point M(m) par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$: $\vec{p}(M/\mathcal{R}) = m\vec{v}(M/\mathcal{R})$

$kg.m.s^{-1}$ kg $m.s^{-1}$.   m : masse inerte

Expérimentalement : La masse inerte se confond avec la masse gravitationnelle.

b) Quantité de mouvement d'un système de points S = {M_i (m_i)} par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$.

*** $\vec{p}(Syst/\mathcal{R}) = \sum_i \vec{p}(M_i/\mathcal{R}) = m\vec{v}(G/\mathcal{R})$



démo : Pour un syst. de points $M_i(m_i)$

$\vec{p}(Syst/\mathcal{R}) = \sum_i \vec{p_i}(M_i/\mathcal{R}) = \sum_i m_i \vec{v_i}(M_i/\mathcal{R})$

G centre de gravité du système de poids :

*** tq : $\sum_i m_i \vec{GM_i} = \vec{0}$ ← déf. centre de gravité

$\Rightarrow \sum_i m_i(\vec{GO} + \vec{OM_i}) = \vec{0}$ où O origine du repère (fixe dans $\mathcal{R}$)

$\Rightarrow \sum_i m_i \vec{OM_i} = \sum_i m_i \vec{OG}$ ①

$$\Rightarrow \boxed{\vec{OG} = \frac{\sum_i m_i \vec{OM_i}}{\sum_i m_i}}$$

Pour un syst fermé : M_i restent à l'intérieur du syst

↳ $m = \sum_i m_i$ est constante

① $\rightarrow m\vec{OG} = \sum_i m_i \vec{OM_i}$

$\Rightarrow m\frac{d\vec{OG}}{dt} = \sum_i m_i \frac{d\vec{OM_i}}{dt}$) on dérive /t. , on suppose m_i = cst.

$\Rightarrow m\vec{v}(G/\mathcal{R}) = \sum_i m_i v(\vec{M_i}/\mathcal{R})$.

d'où $\vec{p}(Syst/\mathcal{R}) = m\vec{v}(G/\mathcal{R})$ où $m = \sum_i m_i$

2.) Principe d'inertie (ou première loi de Newton) et référentiels

Principe d'inertie (ou première loi de Newton)

*** Il existe au moins un référentiel privilégié appelé référentiel inertiel ou galiléen dans lequel le mouvement de tout point isolé est rectiligne et uniforme.

point isolé : soumis à aucune interaction

Mvt rectiligne uniforme : $\vec{v} = \vec{cst}$, $\vec{a} = \vec{0}$

⚠ également valables pour les systèmes (solide, corps géologique)

Propriété :

** L'ensemble des référentiels galiléens est constitué de tous les référentiels en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres.

En effet, si $\mathcal{R}$ est en translation rectiligne uniforme par rapport à $\mathcal{R}_0$, un mouvement rectiligne uniforme dans $\mathcal{R}_0$ est aussi rectiligne uniforme dans $\mathcal{R}$.

Référentiel de Copernic $\Re_C(C, \vec{e}_{xC}, \vec{e}_{yC}, \vec{e}_{zC})$
- origine : centre d'inertie du système solaire
- axes : direction de trois étoiles fixes de notre galaxie (suffisament lointaines)

Meilleur référentiel galiléen mis en évidence expérimentalement

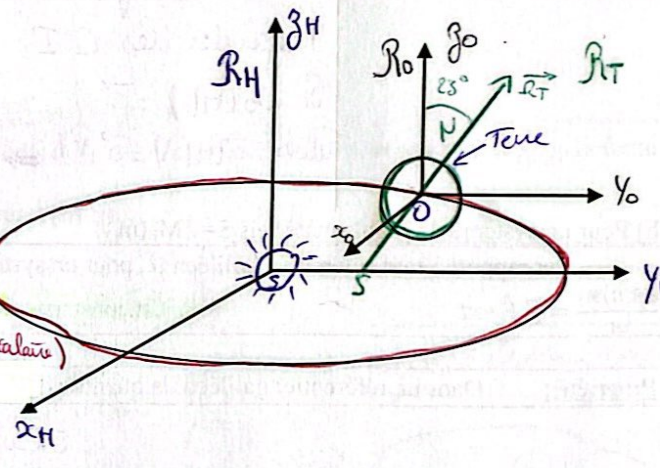
Référentiel héliocentrique $\Re_H(S, \vec{e}_{xH}, \vec{e}_{yH}, \vec{e}_{zH})$
- origine : centre d'inertie du soleil
- axes : direction de trois étoiles fixes de notre galaxie

Décalé de $\overrightarrow{CS}$ par rapport à $\Re_C$, supposé galiléen avec une excellente approximation.

Référentiel géocentrique $\Re_O(O, \vec{e}_{xO}, \vec{e}_{yO}, \vec{e}_{zO})$
- origine : centre d'inertie de la terre
- axes : directions de trois étoiles fixes de notre galaxie

Mouvement de translation elliptique de $\Re_0/\Re_H$ de période 365,25 jours solaires. = 1 année

inclinaison de 23° de l'axe de rotat° de la Terre



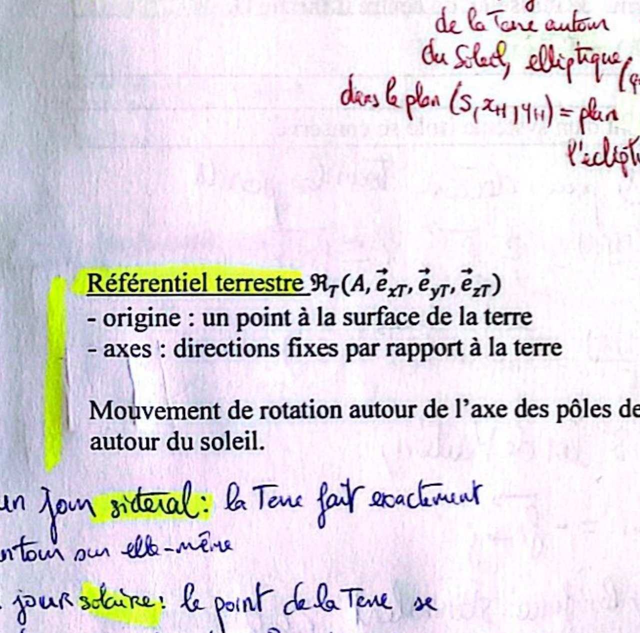
Trajectoire du centre de la Terre autour du Soleil, elliptique (quasi-circulaire) dans le plan (S, x_H, y_H) = plan de l'écliptique

Référentiel terrestre $\Re_T(A, \vec{e}_{xT}, \vec{e}_{yT}, \vec{e}_{zT})$
- origine : un point à la surface de la terre
- axes : directions fixes par rapport à la terre

Mouvement de rotation autour de l'axe des pôles de période un jour sidéral et rotation du centre d'inertie de la terre autour du soleil.

un jour sidéral : la Terre fait exactement un tour sur elle-même

1 jour solaire : le point de la Terre se retrouve exactement en face du soleil



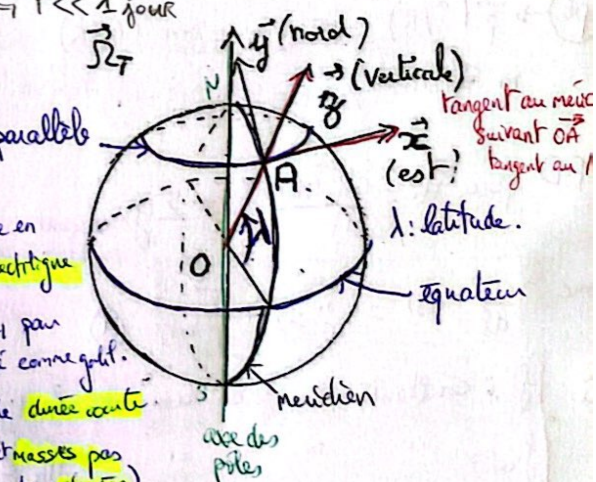
1 jour solaire > 1 jour sidéral

* R_0 gal ⇔ translat° rect. unif. + t << 1 an + masses pas élevées du tout

* R_T gal ⇔ t << 1 jour

+ R_0 doit être en translation rectiligne uniforme / R_H pour être considéré comme galil. ⇒ expérience de durée courte devant un an (et masses pas trop élevées)

ex : ne fonctionne pas pour les marées (océan)



+ R_T considéré galiléen pour expériences de durées courtes devant un jour.

3.) Loi de la quantité de mouvement (ou deuxième loi de Newton)

****

a) Pour un point matériel M(m)

Par rapport à tout référentiel galiléen $\mathfrak{R}$, le mouvement d'un point matériel M de masse (inerte) m vérifie la relation : $\frac{d\vec{p}(M/\mathfrak{R})}{dt} = \sum \vec{F}$ appliquées au point M. Si m est constante, $m\vec{a}(M/\mathfrak{R}) = \sum \vec{F}$

Rq : cas particulier au prog :

m = cste

$$\frac{d\vec{p}(M/\mathcal{R})}{dt} = \frac{d(m\vec{v}(M/\mathcal{R}))}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt}(M/\mathcal{R}) = m\vec{a}(M/\mathcal{R})$$

Rq2 : point isolé (aucune interaction)

ou pseudo-isolé ($\Sigma\vec{F} = \vec{0}$)

LFD : $\frac{d\vec{p}(M/R)}{dt} = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{p} = \vec{cste}$

Si m = cste, $\vec{v} = \vec{cste_2}$

$\hookrightarrow$ mvt rectiligne uniforme

Regarder les C.I :

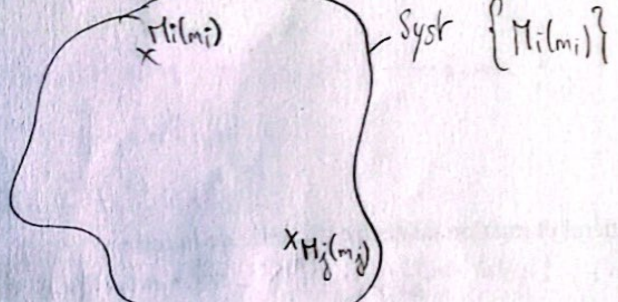
Si $\vec{v_0}(M/R) = \vec{0}$

alors $\vec{v}(M/R) = \vec{0}\ \forall t \Rightarrow$ point immobile

b) Pour un système de points matériels S= {M_i (m_i)}

Par rapport à tout référentiel galiléen $\mathfrak{R}$, pour un système fermé de masse m, de centre d'inertie G,
$\frac{d\vec{p}(G/\mathfrak{R})}{dt} = \sum \vec{F}\,ext$ Si m est constante, $m\vec{a}(G/\mathfrak{R}) = \sum \vec{F}\,ext$

Propriété : Dans un référentiel galiléen, la quantité de mouvement d'un système isolé se conserve.



pb → $\vec{p}(S/R) = \Sigma m_i v_i = m\vec{v}(G/R)$

m constante, $m = \sum_i m_i$

LFD pour Mi : $\frac{d\vec{p}(M_i/R)}{dt} = \Sigma f$ s'exerçant sur Mi

donc $\boxed{\frac{d\vec{p}(M_i/R)}{dt} = \vec{f_{i\,int}} + \vec{f_{i\,ext}}}$ ①

où $\begin{cases} f_{i\,int} \text{ résultante des forces s'exerçant par les } M_j \in S \\ f_{i\,ext} : \text{" " " " " } M_k \notin S \end{cases}$

d'où $\begin{cases} f_{i\,int} = \sum_{j \neq i,\ M_j \in S} \vec{f_{j \to i}} \\ f_{i\,ext} = \Sigma\ \vec{f_{k}} \end{cases}$

On somme ① pour décrire tous les points :

$$\sum_i \frac{d\vec{p}(M_i/R)}{dt} = \sum_i \vec{f_{i\,int}} + \sum_i \vec{f_{i\,ext}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Sigma\frac{d\vec{p}(M_i/R)}{dt} = \vec{F_{int}} + \vec{F_{ext}}} \quad ②$$

• d'après la 3e loi de Newton,

$\vec{f_{j \to i}} = -\vec{f_{i \to j}}$

dans $\vec{F_{int}}$, les forces s'annulent 2 à 2

$\Rightarrow \vec{F_{int}} = \vec{0}$

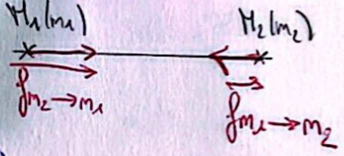
• de +, $\sum_i \frac{d\vec{p}(M_i/R)}{dt} = \frac{d}{dt}(\Sigma\vec{p}(M_i/R)) = \frac{d}{dt}\vec{p}(G/R)$

d'où $\frac{d\vec{p}(G/R)}{dt} = \vec{F_{ext}}$ ← ②

donc $m\vec{a}(G/R) = \vec{F_{ext}}$.

4.) Principe des actions réciproques (ou troisième loi de Newton).

* Soient M_1 et M_2 deux points matériels en interaction. $\vec{f}_{1\to2}$ est la force exercée par M_1 sur M_2 et $\vec{f}_{2\to1}$ la force
* exercée par M_2 sur M_1.
* Les forces d'interaction sont opposées et colinéaires à (M_1M_2).
* $\vec{f}_{2\to1} = -\vec{f}_{1\to2}$ et $\overrightarrow{M_1M_2} \wedge \vec{f}_{1\to2} = \vec{0}$



fonctionne uniquement pour 2 systèmes en interaction

$\vec{f}_{syst\,2\to syst\,1} = -\vec{f}_{S_1\to S_2}$

Exemple d'application :

Syst : $S = \{M_1(m_1), M_2(m_2)\}$; ref : terrestre galiléen.

- LFD en M_1 : $\boxed{\frac{d\vec{p_1}}{dt} = \vec{f}_{M_2\to M_1}}$ (1)
- LFD en M_2 : $\boxed{\frac{d\vec{p_2}}{dt} = \vec{f}_{M_1\to M_2}}$ (2)

(1)+(2) $\rightarrow \frac{d\vec{p_1}}{dt} + \frac{d\vec{p_2}}{dt} = \vec{f}_{M_2\to M_1} + \vec{f}_{M_1\to M_2}$

$\Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}$ d'après la 3e loi de Newton

d'où $\vec{p} = m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2} = \vec{cste}$ ← qté de mvt totale du syst.

(ex : interaction gravitationnelle entre M_1 et M_2
↳ la qté de mvt d'un syst isolé se conserve)

III Applications

1.) Méthode de résolution d'un problème de mécanique

1. Définir le système étudié.
   Définir le référentiel par rapport auquel on étudie le mouvement. Est-il galiléen ?

2. Bilan des forces appliquées (à distance, contact, tension, rappel)

3. Application des théorèmes généraux (LFD), MC3 : $E_{cinétique}$, $E_{mécanique}$.

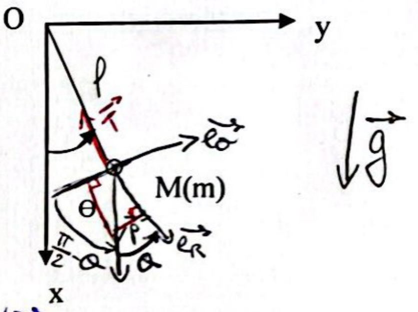
4. Choix d'un repère de projection et projection dans ce repère. cartésiennes → si on sait rien, cylindrique → si circulaire.

5. Intégration des équations avec prise en compte des conditions initiales sur la position et la vitesse.

MÉTHODE ≃ TERM

• longueur l fixée
• perle $M(m)$ au bout du fil

2.) Pendule simple



① **Syst**: {perle $M(m)$}

Ref: terrestre galiléen (→ pour une durée courte devant 1 jour)

② **forces**: - poids : $\vec{P} = m\vec{g}$

- tension du fil : $\vec{T}$, colinéaire au fil s'il est tendu

③ **Loi fondamentale de la dynamique (LFD)**:

$m\vec{a}(M/R) = \Sigma\vec{F}$
$= \vec{P} + \vec{T}$

④ **Repère de projection**:

$M(m)$ décrit un mvt circulaire autour de O (tant que le fil est tendu)

↳ coordonnées cylindriques

* si le mvt est dans le plan ($\vec{e_\theta} \in$ plan)
↳ coordonnées polaires

• $\theta > 0$ (supposé) • $\vec{e_\theta} \perp \vec{e_R}$ dans le sens de θ

• $\vec{e_R}$ le long de $\vec{OM}$

$\vec{OM} = l\vec{e_R}$, $l = cst$ (fil inextensible)

$\vec{v}(M/R) = \frac{d\vec{OM}}{dt}/R = l\frac{d\vec{e_R}}{dt}/R$
$= l\,\frac{d\vec{e_R}}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt}$

$\Rightarrow \vec{v}(M/R) = l\dot{\theta}\vec{e_\theta}$.

$\vec{a}(M/R) = l\ddot{\theta}\vec{e_\theta} + l\dot{\theta}\frac{d\vec{e_\theta}}{dt}$

$\Rightarrow \vec{a}(M/R) = l\ddot{\theta}\vec{e_\theta} - l\dot{\theta}^2\vec{e_R}$

• on projette $\vec{P}$ dans $(\vec{e_R}, \vec{e_\theta})$

$\vec{P} = mg\cos\theta\,\vec{e_R} - mg\cos(\frac{\pi}{2} - \theta)\,\vec{e_\theta}$

$\vec{P} = mg\cos(\theta)\,\vec{e_R} - mg\sin(\theta)\,\vec{e_\theta}$

$\vec{T} = -T\vec{e_R}$ où T est def en valeur algébrique

Rq : A l'équilibre : $\Sigma\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$.

⑤ **Projection de la LFD**:

sur $\vec{e_\theta}$: $\begin{cases} ml\ddot{\theta} = -mg\sin(\theta) & ① \\ -ml\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - T & ② \end{cases}$
sur $\vec{e_R}$

② ⟹ $T = mg\cos\theta + ml\dot{\theta}^2$

① ⟶ $\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta$

$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$

pour de petites oscillations : $\theta \simeq 0 \Rightarrow \theta \simeq \sin\theta$.

on a alors $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$, oscillateur harmonique avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

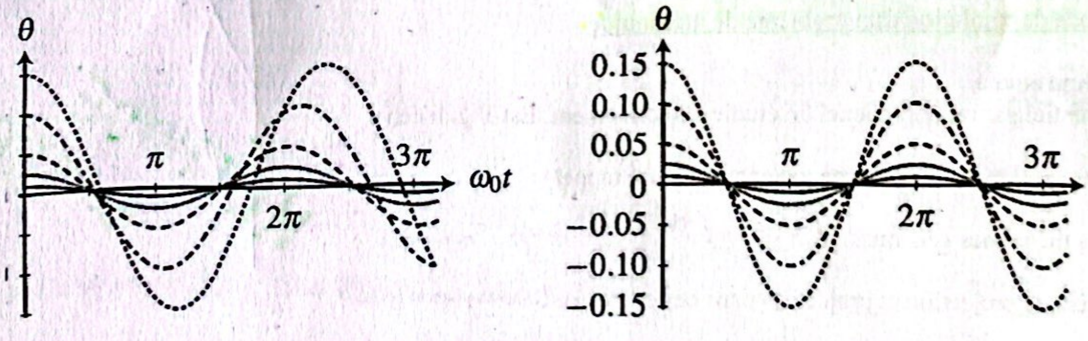


Figure 15.18 – Évolution temporelle de l'angle θ pour différentes conditions initiales. À gauche, l'amplitude des oscillations est comprise entre 0,1 et 1,5 rad ; à droite, elle est comprise entre 0,01 et 0,15 rad.

$\ddot{\theta} + \omega_0 \theta = 0$

donc $\theta = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$

CI : $\theta(0) = \theta_0$
$v(0) = 0$

on écarte M de sa position d'éq et on le lâche

or $v = l\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta}(0) = 0$

$\Rightarrow -A\omega_0 \sin(0) + B\omega_0 \cos(0) = 0$

$\Rightarrow B = 0$ car $\omega_0 \neq 0$

donc $\theta(t) = A\cos(\omega_0 t)$

or $\theta(0) = \theta_0$ donc $A\cos(0) = \theta_0$ donc $A = \theta_0$

donc $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)$.

Rq : Vérification de l'équilibre : θ = cste, $\dot{\theta} = 0$, $\ddot{\theta} = 0$

Rq
1 → $\sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0\,[\pi] \Rightarrow \theta = 0$.
⚠ $\theta = \pi$, équilibre si le fil est remplacé par 1 tige, sinon le fil se détend
2 $T = mg\cos\theta \Rightarrow T = mg$

Période propre pour des petites oscillations :

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ ← indépendt des CI
↳ isochronisme des petites oscill.

Rq : pour des oscillations grandes, la période dépend des CI.

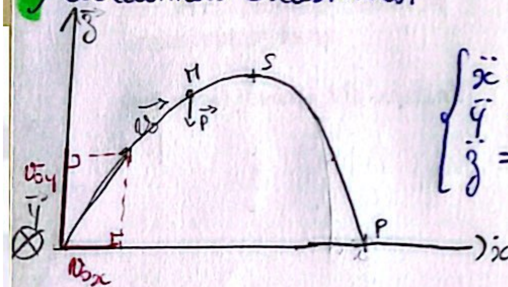
3.) Tir d'un projectile dans le champ de pesanteur uniforme

1 Syst : $\{M(m)\}$, réf : terrestre galiléen

2 forces : poids : $\vec{P} = m\vec{g}$

3 LFD : $m\vec{a} = m\vec{g} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$

4 coordonnées cartésiennes :



$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 & (1) \\ \ddot{y} = 0 & (2) \\ \ddot{z} = -g & (3) \end{cases}$$

5 On tire l'obus de O, avec une vitesse $\vec{v_0} = v_{0x}\vec{e_x} + v_{0z}\vec{e_z}$

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

$$\begin{cases} \dot{x} = A \\ \dot{y} = B \\ \dot{z} = -gt + C \end{cases}$$ où $(A,B,C) \in \mathbb{R}^3$.

d'après les CI : $\dot{y}(0) = 0_y$ et $\dot{x}(0) = v_{0x}$ et $\dot{z}(0) = v_{0z}$

on a donc $A = v_{0x}$ et $B = 0_y$ et $C = v_{0z}$

donc $$\begin{cases} \dot{x} = v_{0x} \\ \dot{y} = 0_y \\ \dot{z} = -gt + v_{0z} \end{cases}$$

$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$, on a alors $\vec{x}$: $$\begin{cases} x = v_{0x}t + D \\ y = E \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t + F. \end{cases}$$

d'après les CI, $x(0) = y(0) = z(0) = 0$.

donc $D = E = F = 0$

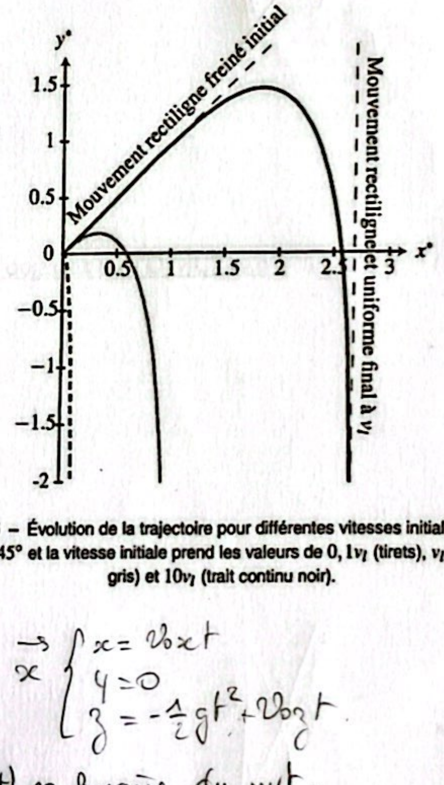


Figure 15.15 – Évolution de la trajectoire pour différentes vitesses initiales. L'angle de tir est fixé à 45° et la vitesse initiale prend les valeurs de 0,1v_l (tirets), v_l (trait continu gris) et 10v_l (trait continu noir).

donc $\vec{x}$ $$\begin{cases} x = v_{0x}t \\ y = 0 \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t \end{cases}$$

$x(t), z(t)$ éq horaire du mvt.

Sommet S : $\frac{dz}{dx} = 0$

Portée : $z = 0$.

$x = v_{0x}t \Rightarrow t = \frac{v_{0x}}{x}$.

donc $z(x) = -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_{0x}^2}{x^2}\right) + v_{0z}\frac{v_{0x}}{x}$

2) pendule simple (suite)

Rq importante : En présence de frottements fluides :

$$\vec{F_f} = -\alpha \vec{v} = -\alpha l \dot{\theta} \vec{e_\theta}$$

1 $\rightarrow m l \ddot{\theta} = -mg \sin\theta - \alpha l \dot{\theta}$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

petites oscillations, $\sin\theta \simeq \theta$

on a alors : $\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$

↳ oscillateur amorti (cf SE4)

$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 = 0 \rightarrow$ eq caract $\rightarrow$ signe de $\Delta \rightarrow \begin{cases} \text{apériodique} \\ \text{pseudo-périodique} \\ \ldots \end{cases}$