Sommet : $\frac{dz}{dx} = 0$

$\Rightarrow -\frac{g}{v_{0x}^2}x + \frac{v_{0z}}{v_{0x}} = 0$

$\Rightarrow x = \frac{v_{0z}}{v_{0x}} \times \frac{v_{0x}^2}{g}$

$\Rightarrow \boxed{x_S = \frac{v_{0z}v_{0x}}{g}}$

Donc $z_S = -\frac{g}{2v_{0x}^2} \times \frac{v_{0z}^2 v_{0x}^2}{g^2} + \frac{v_{0z}}{v_{0x}} \times \frac{v_{0z}v_{0x}}{g}$

$\Rightarrow z_S = -\frac{v_{0z}^2}{2g} + \frac{v_{0z}^2}{g}$

$\Rightarrow z_S = \frac{v_{0z}^2}{2g}$

Portée : $z_P = 0 \Rightarrow x\left(-\frac{gx}{2v_{0x}^2} + \frac{v_{0z}}{v_{0x}}\right) = 0$ (4)

$\Rightarrow x_P = \frac{v_{0z}}{v_{0x}} \times \frac{2v_{0x}^2}{g}$

$\Rightarrow \boxed{x_P = 2\frac{v_{0z}v_{0x}}{g} = 2x_S}$

cf schéma au dos pr la suite)

$\Rightarrow \begin{cases} v_{0x} = v_0\cos\theta \\ v_{0z} = v_0\cos(\frac{\pi}{2}-\theta) = v_0\sin\theta \end{cases}$

$\Rightarrow x_P = \frac{2v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g} = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\theta)$

$\frac{dx_P}{d\theta} = \frac{v_0^2}{g} \times 2\cos(2\theta) = 0 \Rightarrow \cos(2\theta) = 0$

or $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$.

portée max pour $\theta = \frac{\pi}{4}$.

2b) Avec frott.

LFD : $m\vec{a} = m\vec{g} - \alpha\vec{v}$

$\Rightarrow m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - \alpha\vec{v}$

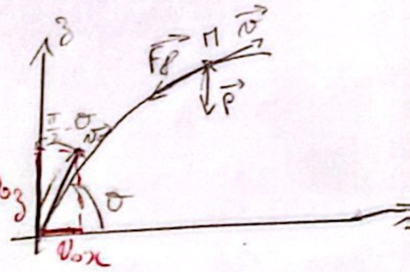
(1) $m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} \Rightarrow m\frac{dv_x}{dt} = -\alpha v_x$

(2) $m\ddot{y} = -\alpha\dot{y} \Rightarrow m\frac{dv_y}{dt} = -\alpha v_y$

(3) $m\ddot{z} = -\alpha\dot{z} - mg \Rightarrow m\frac{dv_z}{dt} = -\alpha v_z - mg$

(2) → pas de mvt en $\vec{y}$

donc $y = 0$



(1) → $\frac{dv_x}{dt} = -\frac{\alpha}{m}v_x$

↳ $v_x = C\exp(-\frac{\alpha}{m}t)$

à $t = 0$, $v(0) = v_{0x} = C$

$\Rightarrow \boxed{v_x = v_{0x}e^{-\frac{\alpha}{m}t}}$ (1')

(1') → $v_x = \frac{dx}{dt} = v_{0x}e^{-\frac{\alpha}{m}t}$

donc $x = v_{0x} \times \left(-\frac{m}{\alpha}\right)e^{-\frac{\alpha}{m}t} + D$

or $x(0) = -\frac{m}{\alpha}v_{0x} + D = 0 \Rightarrow D = \frac{mv_{0x}}{\alpha}$

$\Rightarrow \boxed{x = \frac{mv_{0x}}{\alpha}\left(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t}\right)}$ (1'')

(3) → $\frac{dv_z}{dt} + \frac{\alpha}{m}v_z = -g$

↳ $v_z = \underbrace{Ee^{-\frac{\alpha}{m}t}}_{\text{sol libre}} - \underbrace{\frac{mg}{\alpha}}_{\text{sol forcée}}$

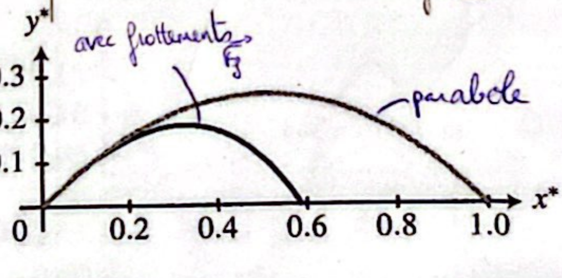


Figure 15.16 – Comparaison entre une trajectoire avec frottement pour laquelle $v_0 = v_l$ (en noir) et une trajectoire sans frottement avec la même vitesse initiale (en gris). Les frottements diminuent la portée sans changer fondamentalement la forme de la trajectoire. L'angle de tir est de 45° par rapport à l'horizontale.

2) pendule simple (suite)

p11

<u>Rq importante</u> : En présence de frottements fluides :

$$\vec{F_f} = -\alpha \vec{v} = -\alpha l \dot{\theta} \vec{e_\theta}$$

(1) → $m l \ddot{\theta} = -mg \sin\theta - \alpha l \dot{\theta}$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

petites oscillations, $\sin\theta \simeq \theta$

on a alors : $\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$

↳ oscillateur amorti (cf SE4)

$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 = 0$ → eq caract → signe de Δ → { apériodique, pseudo-périodique, ... }

2b) Avec frottements :

p12

$$v_z(0) = E - \frac{mg}{\alpha} = v_{0z}$$

$$\Rightarrow E = v_{0z} + \frac{mg}{\alpha}$$

$$\boxed{v_z = \left(v_{0z} + \frac{mg}{\alpha}\right)e^{-\frac{\alpha}{m}t} - \frac{mg}{\alpha}} \quad (3')$$

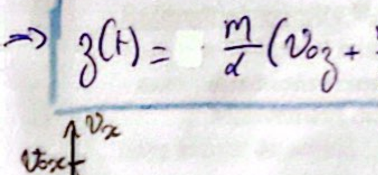
$$v_z = \frac{dz}{dt}$$

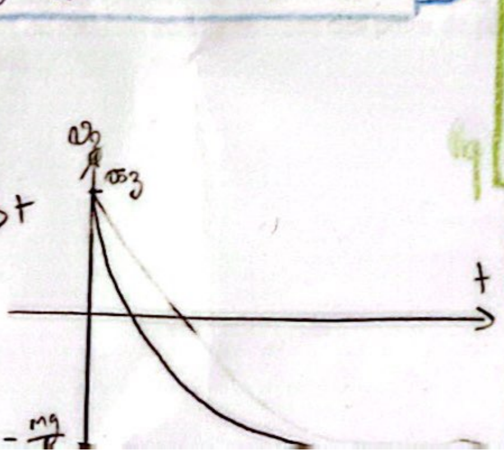
↳ $z(t) = -\frac{m}{\alpha}\left(v_{0z} + \frac{mg}{\alpha}\right)e^{-\frac{\alpha}{m}t} - \frac{mg}{\alpha}t + F$

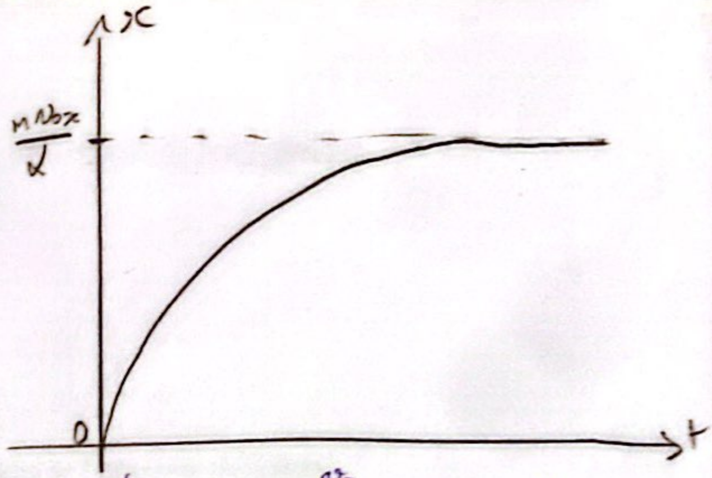
$$z(0) = -\frac{m}{\alpha}\left(v_{0z} + \frac{mg}{\alpha}\right) + F = 0$$

$$\Rightarrow F = \frac{m}{\alpha}\left(v_{0z} + \frac{mg}{\alpha}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{z(t) = \frac{m}{\alpha}\left(v_{0z} + \frac{mg}{\alpha}\right)\left(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t}\right) - \frac{mg}{\alpha}t} \quad (3'')$$







Sommet : $\frac{dz}{dx} = 0 \iff \frac{v_z}{v_x} = 0 \Rightarrow v_z = 0$

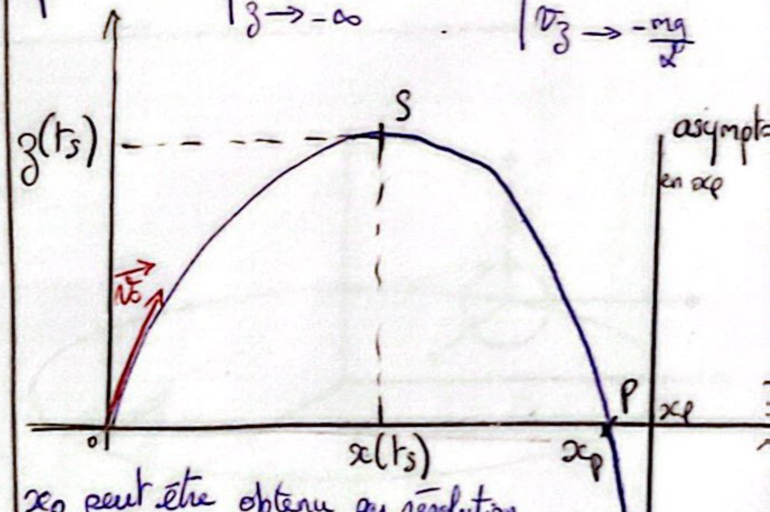
(3') → $v_z = \left(v_{0z} + \frac{mg}{\alpha}\right)e^{-\frac{\alpha}{m}t} - \frac{mg}{\alpha} = 0$

$$\Rightarrow e^{-\frac{\alpha}{m}t} = \frac{mg}{\alpha} \times \frac{\alpha}{v_{0z}\alpha + mg}$$

$$\Rightarrow -\frac{\alpha}{m}t = \ln\left(\frac{mg}{v_{0z}\alpha + mg}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{t_S = \frac{\alpha}{m}\ln\left(\frac{v_{0z}\alpha + mg}{mg}\right)}$$

qd $t \to +\infty$: $x \to \frac{m v_{0x}}{\alpha} = x_l$, $z \to -\infty$ | $v_x \to 0$, $v_z \to -\frac{mg}{\alpha}$

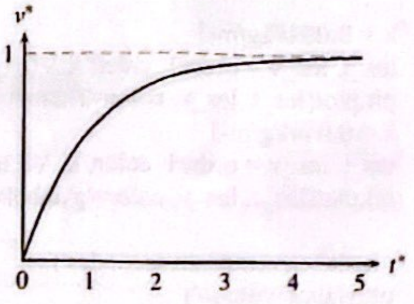


x_p peut être obtenu par résolution numérique

<u>Rq</u> : On doit vérifier que si $\alpha \to 0$, on retrouve les résultats de 3a)

⚠ fig 15.15 et 15.16 : $\vec{F_f} = -k v \vec{v}$

<u>LFD</u> : $m\vec{a} = m\vec{g} - k v \vec{v}$



IV Scripts python : Chute d'une bille, tir de projectile.

1.) Frottements en -αv. Ecriture d'une équation adimensionnée

Bille de vitesse initiale nulle, dans le référentiel terrestre galiléen

Syst : {bille M(m)}

ref : terrestre galiléen

LFD : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F_f} = m\vec{g} - \alpha\vec{v}$

$m\frac{dv}{dt} = mg - \alpha v$

$\Rightarrow \boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{\alpha}{m}v = g}$ (1)

Vitesse limite v_ℓ : $\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v_\ell = \frac{gm}{\alpha}$

(1) $\rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{\alpha}{m}v = \frac{\alpha}{m}v_\ell$ — ms^{-1}

ms^{-2} ms^{-1}

on pose $\frac{1}{\tau} = \frac{\alpha}{m}$

$\rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau}v = \frac{1}{\tau}v_\ell$

sol libre : $v = Ae^{-t/\tau}$

" forcée : v_ℓ

$\Rightarrow v(t) = Ae^{-t/\tau} + v_\ell$

$v(0) = 0$, $A = -v_\ell$

$\Rightarrow v = v_\ell(1 - e^{-t/\tau})$

$\Rightarrow \frac{v}{v_\ell} = 1 - e^{-t^*} = v^*$ où $t^* = \frac{t}{\tau}$

sans dimension

sans dimension

↳ utile pour passer en informatique

2.) Frottements en $-kv^2$. Résolution par la méthode d'Euler

equa diff (1) : $m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2$

$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v^2$

$\frac{dv}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{v(t+h) - v(h)}{h}$

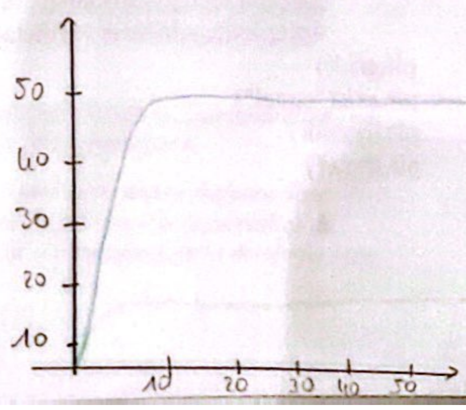
$\Rightarrow \frac{v_{k+1} - v_k}{h} = g - \frac{k}{m}v_k^2$

$v_{k+1} = v_k + h\left(g - \frac{k}{m}v_k^2\right)$

```
#MC2 chute d'une bille. méthode d'Euler. Permet d'obtenir les courbes données au TD MC2 exo 1
#Chute libre d'une bille avec résistance de l'air en -kv**2
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def ordre1_euler(k,V0, tmax, n):
    h = tmax / n
    v = V0
    t = 0
    les_t = [t]
    les_v = [v]
    for i in range(n):
        v = v + h(g - (k/m) * v ** 2)   # trouvée par l'equa diff
        t = t + h
        les_v.append(v)
        les_t.append(t)
    return(les_v, les_t)


##Tracé de la solution de la méthode d'Euler
g=9.81#m.s-2
m=1 #kg
tau=1 # sec
tmax=50*tau
V0=0 #vitesse initiale
n = 100 #MODIFIER LE NOMBRE DE POINTS
```



```
k = 0.004#kg/m-1
les_t, les_v = ordre1_euler( k,V0, tmax, n)
plt.plot(les_t, les_v, color='b',label='k=0.004')
k = 0.04#kg/m-1
les_t, les_v = ordre1_euler( k, V0,tmax, n)
plt.plot(les_t, les_v, color='g',label='k=0.04')

plt.xlabel('temps en secondes')
plt.ylabel('vitesse')
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```

3.) Tir de projectile avec frottements en $-k\ v^2$:

On résout avec odeint : "MC2. boulet"

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import scipy.integrate as spi

#Parametres
m=8 # kg
rho = 1.2 # kg/m**3 , air
Cx= .2 # sphere
S = 0.3 # m^2
g= 9.80 # m/s**2

# conditions initiales
theta0 = np.pi/4
v0 =100 # m/s
etat_initial = [x0,y0,vx0,vy0] = [0,0,v0*np.cos(theta0),v0*np.sin(theta0)]
#equadiff
def equadiff(etat,t):
        x,y,vx,vy = etat
        v2 = vx*vx + vy*vy
        theta = np.arctan2(vy,vx)
        F= 1/2 * rho * S * Cx * v2##force de frottement fluide
        Fx = -F* np.cos(theta)
        Fy = -F* np.sin(theta)
LFD {   ax= Fx/m
        ay= Fy/m - g
        derivee_de_l_etat = vx,vy,ax,ay
        return derivee_de_l_etat
tmax = 30 # > 2vo/g
t=np.linspace(0,tmax,1000) # instants de simulation

plt.close("all")
for theta in range(0,95,5):
        theta0 = theta * np.pi / 180
        etat_initial = [x0,y0,vx0,vy0] = [0,0,v0*np.cos(theta0),v0*np.sin(theta0)]
        x,y,vx,vy = spi.odeint(equadiff,etat_initial,t).T#☼le .T permet de remplir les 4 listes
        air = y>=0
        #print(theta,t[air.argmin()])
        plt.plot(x[air],y[air],label = str(theta)+"°") #pour ne tracer que les y>0
        #plt.plot(x,y,label = str(theta)+"°") #Pour tracer la courbe en entier
plt.grid()
plt.axis("equal")
plt.legend()
plt.show()
```