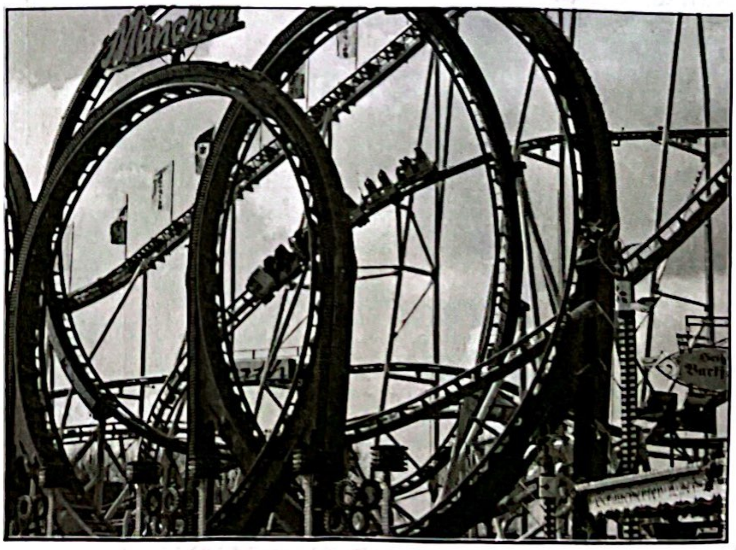
Mécanique. MC3 Energie du point matériel



I Travail et puissance d'une force

1.) Définitions

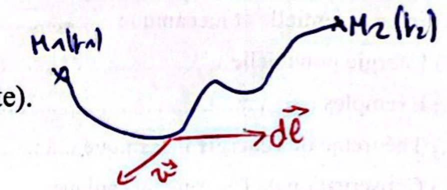
<u>Hypothèse</u> : point matériel M(m), soumis à la force $\vec{F}$, de vitesse $\vec{v}$, dans un référentiel $\mathfrak{R}$ quelconque.

<u>Définition</u> : <u>Travail de $\vec{F}$ lorsque M se déplace de $M_1(t_1)$ à $M_2(t_2)$</u> $\boxed{W_{1\to2}(\vec{F}) = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}.\overrightarrow{dl}}$

<u>Travail élémentaire de $\vec{F}$ lorsque M se déplace de $\overrightarrow{dl}$</u> $\boxed{\delta W \ = \vec{F}.\overrightarrow{dl}}$

<u>Puissance de $\vec{F}$</u>: $P(\vec{F}) = \frac{\delta W}{dt} = \vec{F}.\vec{v}$

$P(\vec{F}) > 0$ Puissance motrice, ou travail moteur (= force motrice).
$P(\vec{F}) < 0$ Puissance résistante, ou travail résistant (= force résistante).



$\vec{dl}$ = déplacement élémentaire tangent à la trajectoire dans le sens du déplacement

$\vec{v} = \frac{\vec{dl}}{dt} \Rightarrow \vec{dl} = \vec{v}dt \quad W_{1\to2}(\vec{F}) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}.\vec{v}\,dt$

<u>unités</u> $u_W = Nm = J$ (Joule)
$u_P = J.s^{-1} = W$ (Watt)

$W_{1\to2}(\vec{F}) = \int_{M_1}^{M_2} \delta W \quad$ ou $\delta W = \vec{F}.\vec{dl} = \vec{F}.\vec{v}\,dt$

δ quantité infinitésimale. Quand on intègre une quantité on obtient la quantité totale → le travail.

<u>Puissance</u> $P = \frac{\delta W}{dt} = \frac{\vec{F}.\vec{dl}}{dt} = \frac{\vec{F}\vec{v}dt}{dt} = \vec{F}\vec{v}$

2.) Exemples de forces qui ne travaillent pas

<u>Reaction normale</u>
$\perp$ support (donc au déplacement)
$W(\vec{R_N}) = \int_{M_1}^{M_2} \vec{R_N}.\vec{dl} = 0$

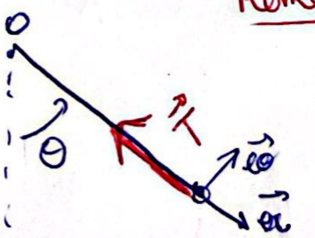
<u>Tension du fil</u> (pour 1 pendule)
fil tendu

$W(\vec{T}) = \int \vec{T}\vec{dl}$

<u>Mouvement circulaire</u>. $\vec{OM} = l\vec{e_r}$
$\vec{v} = l\dot{\theta}\vec{e_\theta} \quad \vec{T} = -T\vec{e_r} \quad W_{1\to2}(\vec{T}) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{T}\vec{v}\,dt = 0$

<u>Force magnétique</u> $\vec{F_m} = q\vec{v}\wedge\vec{B}$

$W_{1\to2}(\vec{F_m}) = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F_m}.\vec{dl} = \int_{M_1}^{M_2} \underbrace{(q\vec{v}\wedge\vec{B})}_{\perp\vec{v}}.\vec{v}dt = 0$



Remarque

$W_{M_1\to M_2}(\vec{F}) = \vec{F}.\overrightarrow{M_1M_2}$ pour 1 force constante.
(cf terminale)

Scanned with CamScanner

II Théorème de la puissance et de l'énergie cinétique

1.) Energie cinétique :

Pour un point matériel M(m) de vitesse $\vec{v}$, dans un référentiel $\mathfrak{R}$ quelconque, on définit l'énergie cinétique $Ec\,(M/\mathfrak{R}) = ½\, m\, v^2(M/\mathfrak{R})$ (Joule)

2.) Enoncé des théorèmes

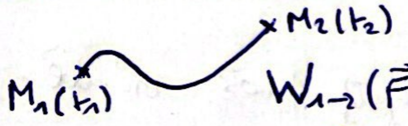
Hypothèse : point matériel M(m) soumis à la résultante des forces $\vec{F}$, de vitesse $\vec{v}$, dans un référentiel $\mathfrak{R}$ galiléen.

Théorème de l'énergie cinétique dans $\mathfrak{R}_g$ galiléen $W_{1\to2}(\vec{F}) = E_c(t_2) - E_c(t_1)$

Théorème de la puissance cinétique dans $\mathfrak{R}_g$ galiléen $P(\vec{F}) = \frac{dE_c}{dt}$

Théorème de l'énergie cinétique sous forme infinitésimale dans $\mathfrak{R}_g$ galiléen $\delta W = dE_c$

démo : Travail de $\vec{F}$ lorsque M se déplace de M_1 à M_2 :



$$W_{1\to2}(\vec{F}) = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}\cdot d\vec{\ell}$$

LFD pour M(m) dans Rg galiléen

$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$ résultante des forces.

$\vec{v} = \frac{d\vec{\ell}}{dt} \Rightarrow d\vec{\ell} = \vec{v}\,dt$

$$\Rightarrow W_{1\to2}(\vec{F}) = \int_1^2 m\frac{d\vec{v}}{dt}\vec{v}\,dt$$

Rq $\frac{d(\vec{v}\cdot\vec{v})}{dt} = \vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt} = 2\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt}$

$$\Rightarrow W_{1\to2}(\vec{F}) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} m \frac{d(v^2)}{dt}\,dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} d\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right)$$

$$\boxed{W_{1\to2}(\vec{F}) = \left[\tfrac{1}{2}mv^2\right]_{t_1}^{t_2}}$$

démo2 : Puissance cinétique

$P(\vec{F}) = \vec{F}\cdot\vec{v} = m\frac{d\vec{v}}{dt}\vec{v}$

car LFD $\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$

$\Rightarrow P(\vec{F}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$

$$\boxed{P(\vec{F}) = \frac{dEc}{dt}}$$

démo3 infinitésimale.

$\delta W = \vec{F}\,d\vec{\ell} = m\frac{d\vec{v}}{dt}\vec{v}\,dt$

car LFD $\left| \begin{array}{l} m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \\ d\vec{\ell} = \vec{v}\,dt \end{array}\right.$

$\Rightarrow \delta W = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$

$$\Rightarrow \boxed{\delta W = dEc}$$

δ quantité infinitésimale $\int_{M_1}^{M_2} \delta W = W_{1\to2}$

d différentielle totale utilisée pour une fonction de plusieurs variables.

$Ec\,(x,y,z,t)$

$$\int_{M_1(t_1)}^{M_2(t_2)} dEc = [Ec]_{M_1}^{M_2}$$

$$= Ec(M_2) - Ec(M_1)$$

III Energie potentielle et mécanique

1.) Energie potentielle

Hypothèse : Point matériel M(m), soumis à une force $\vec{F}$, dans un référentiel $\mathfrak{R}$ quelconque.

Propriété : Si le travail de $\vec{F}$ lorsque M se déplace de $M_1(t_1)$ à $M_2(t_2)$ ne dépend pas du chemin suivi, mais uniquement des positions initiales et finales, la force est dite conservative et le travail s'écrit sous la forme : (1) $\boxed{W_{1\to2}(\vec{F}) = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}.\vec{dl} = [-Ep]_{M_1}^{M_2}}$ $\boxed{\delta W = \vec{F}.\vec{dl} = -dEp}$ (2)

La fonction Ep est appelée Energie potentielle de M associée à $\vec{F}$. Elle est définie à une constante additive près. C'est une fonction des coordonnées d'espace.

Le travail d'une force conservative le long d'un trajet donné est égal à la diminution d'énergie potentielle. On dit que la force dérive d'une énergie potentielle. Pour une trajectoire fermée, W = 0.

(1) $W_{1\to2}(\vec{F}) = \int_{M_1}^{M_2} \delta W = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}.\vec{dl} = \int_{M_1}^{M_2} -dEp = [-Ep]_{M_1}^{M_2} \Rightarrow \boxed{\delta W = \vec{F}.\vec{dl} = -dEp}$.

(2) $W_{1\to2}(\vec{F}) = \oint_{M_1}^{M_2} \vec{F}.\vec{dl} = [-Ep]_{M_1}^{M_1} = 0$

2.) Exemples

Poids ✓ $\vec{P} = m\vec{g}$ $\downarrow \vec{g}$ $\uparrow \vec{e_z}$

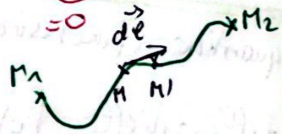
$= -mg\vec{e_z}$

$W_{1\to2}(\vec{P}) = \int_{M_1}^{M_2} \vec{P}.\vec{dl} = \int_{M_1}^{M_2} -mg\vec{e_z}\vec{dl}$

$\vec{dl} = dx\vec{e_x} + dy\vec{e_y} + dz\vec{e_z}$

$\vec{e_z}.\vec{dl} = dx\,\underbrace{\vec{e_z}\vec{e_x}}_{=0} + dy\,\underbrace{\vec{e_z}\vec{e_y}}_{=0} + dz\,\underbrace{\vec{e_z}\vec{e_z}}_{=1}$

$\Rightarrow \vec{e_z}.\vec{dl} = dz$



$W_{1\to2}(\vec{P}) = \int_{M_1}^{M_2} -mg\,dz = [-mgz]_{M_1}^{M_2}$

$= [-Epp]_{M_1}^{M_2}$

$\boxed{Epp = mgz + cste}$ $\uparrow \vec{e_z}$

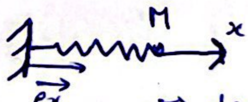
Augmente avec l'altitude

Energie potentielle de pesanteur.

Rq $Epp = -mgz + cste$ $\downarrow \vec{e_z}$

↘ avec la profondeur.

Force de rappel ressort ✓



$\vec{e_x}$ dans le sens de l'étirement

$\vec{F_r} = -k(l-l_0)\vec{e_x}$ $x = l - l_0$.

$\vec{F_r} = -kx\vec{e_x}$

$\vec{dl} = dx\vec{e_x} + dy\vec{e_y} + dz\vec{e_z}$ $\vec{e_x}.\vec{dl} = dx$

$W_{1\to2}(\vec{F_r}) = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F_r}.\vec{dl} = \int_{M_1}^{M_2} -kx\vec{e_x}\vec{dl}$

Or $\Rightarrow W_{1\to2}(\vec{F_r}) = \int_{M_1}^{M_2} -kx\,dx = \left[-\frac{1}{2}kx^2\right]_{M_1}^{M_2}$

$= [-Epe]$.

Par identification

$\boxed{Epe = \frac{1}{2}kx^2 + cste}$ où $x = (l - l_0)$

energie potentielle élastique.

Force de frottement solide ✗

$\vec{R_T}$ opposée au déplacement

$W_{1\to2}(\vec{R_T}) = \int_{M_1}^{M_2} \vec{R_T}\vec{dl}$ où $\|\vec{R_T}\| = f\|\vec{R_N}\|$

f coef de frottement solide

Si déplacement dans le plan horizontal et aucune autre force :

$R_N = mg$ $R_T = f\,mg = cste$

$\vec{R_T}$ et $\vec{dl}$ sont colinéaires de sens inverse

utilisé pour l'intégrale

$W_{1\to2}(\vec{R_T}) = \int_{M_1}^{M_2} -R_T\,dl = -R_T\int_{M_1}^{M_2} dl$

Si R_T est de norme constante.

$\boxed{W_{1\to2}(\vec{R_T}) = -R_T\,\widehat{M_1M_2}}$ ici le travail dépend de la longueur du trajet elle n'est pas nulle

3.) Théorème de l'énergie mécanique

Hypothèse : Point matériel M(m), soumis à la résultante des forces $\vec{F} = \vec{F}_c + \vec{F}_{nc}$, dans un référentiel $\Re_g$ galiléen.

où : - $\vec{F}_c$ est la résultante des forces conservatives, de travail W_c dérivant de l'énergie potentielle totale Ep.
- $\vec{F}_{nc}$ est la résultante des forces non conservatives de travail W_{nc}.

Théorème de l'énergie mécanique dans un référentiel $\Re_g$ galiléen : $\boxed{[Em]_{M_1}^{M_2} = W_{nc}}$!!! Plus stratégique.

(Joule)
où : Em = Ec + Ep est l'énergie mécanique du point matériel. Em est une fonction des coordonnées d'espace et de leurs dérivées. Elle dépend du référentiel. Elle est définie à une constante additive près.
Ec est l'énergie cinétique.
Ep correspond à la somme des énergies potentielles associées à chaque force conservative.

Théorème de l'énergie mécanique sous forme infinitésimale, dans un référentiel $\Re_g$ galiléen : $\boxed{dEm = \delta W_{nc}}$

Théorème de la puissance mécanique dans un référentiel $\Re_g$ galiléen : $\boxed{\frac{dEm}{dt} = P_{nc}}$

Th de l'énergie cinétique

$$\Delta E_c = [E_c]_{M_1}^{M_2} = W(\vec{F}) \quad (1)$$

où $W(\vec{F}) = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} d\vec{\ell} = \int_{M_1}^{M_2} (\vec{F_c} + \vec{F_{nc}}) d\vec{\ell}$

$$= \int_{M_1}^{M_2} \vec{F_c} d\vec{\ell} + \int_{M_1}^{M_2} \vec{F_{nc}} d\vec{\ell}$$

$$W_{1\to2}(\vec{F}) = W_{c_{1\to2}} + W_{nc_{1\to2}}.$$

$$W_{c\,1\to2} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F_c} d\vec{\ell} = [-E_p]_{M_1}^{M_2}$$

$$(1) \Rightarrow [E_c]_{M_1}^{M_2} = [-E_p]_{M_1}^{M_2} + W_{nc_{1\to2}}$$

$$\Rightarrow [E_c + E_p]_{M_1}^{M_2} = W_{nc\,1\to2}$$

$$\Rightarrow [E_M]_{M_1}^{M_2} = W_{nc\,1\to2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta E_m = E_m(M_2) - E_m(M_1) = W_{nc_{1\to2}}}$$

démo 2 : Th de l'Ec $dE_c = \delta W$ (2)

où $\delta W = \delta W_c + \delta W_{nc}$
$\delta W_c = -dE_p$

$$\Rightarrow dE_c = dW_c + dW_{nc}$$

$$\Rightarrow dE_c = -dE_p + dW_{nc}$$

$$\Rightarrow d(E_c + E_p) = \delta W_{nc}$$

$$\Rightarrow \boxed{dE_m = \delta W_{nc}}$$

Rq : $\int_{M_1}^{M_2} dE_m = \int_{M_1}^{M_2} \delta W_{nc}$

$$[E_M]_{M_1}^{M_2} = W_{nc\,1\to2}.$$

4.) Conservation de l'énergie mécanique

Propriété : L'énergie mécanique se conserve si toutes les forces qui travaillent dérivent d'une énergie potentielle. Elle est alors donnée par les conditions initiales.

Définition : On appelle intégrale première du mouvement toute quantité ne faisant intervenir que les coordonnées de la position et la vitesse et qui se conserve au cours du mouvement.
La conservation de l'énergie mécanique est une intégrale première du mouvement

Remarque : L'énergie mécanique ne se conserve pas dans les cas où il y a des frottements. Seule l'énergie totale se conserve : une partie de l'énergie mécanique aura été transformée en chaleur.