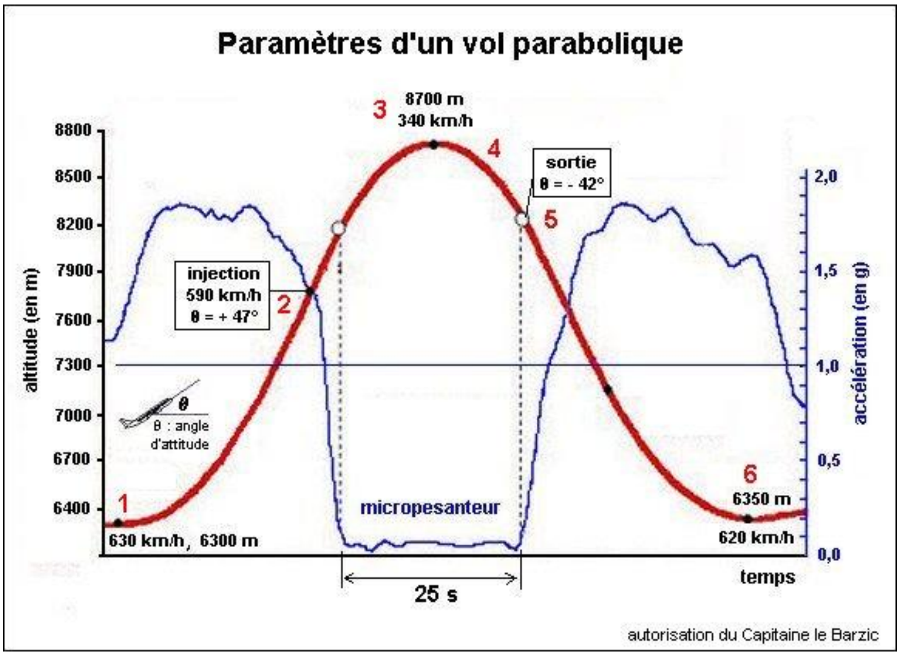
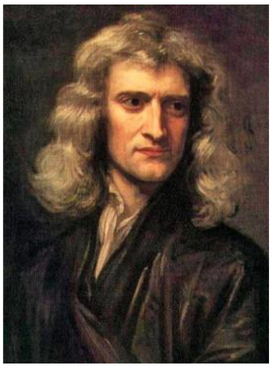
Mécanique MC2 Bases de la dynamique





Isaac Newton (1643–1727) est un mathématicien, physicien, philosophe, alchimiste, astronome et théologien anglais, puis britannique. Figure emblématique des sciences, il est surtout reconnu pour avoir fondé la mécanique classique, pour sa théorie de la gravitation universelle. En optique, il a développé une théorie de la couleur fondée sur l'observation selon laquelle un prisme décompose la lumière blanche en un spectre visible. Il a aussi inventé le télescope à réflexion composé d'un miroir primaire concave appelé télescope de Newton.

En mécanique, il a établi les trois lois universelles du mouvement qui constituent en fait des principes à la base de la grande théorie de Newton concernant le mouvement des corps, théorie que l'on nomme aujourd'hui « mécanique newtonienne » ou encore « mécanique classique ».

Newton a montré que les mouvements des objets sur Terre et des corps célestes sont gouvernés par les mêmes lois naturelles ; en se basant sur les lois de Kepler sur le mouvement des planètes[1], il développa la loi universelle de la gravitation.

Son ouvrage Philosophiae naturalis principia mathematica[2,3], publié en 1687, est considéré comme une œuvre majeure dans l'histoire des sciences. C'est dans celui-ci qu'il décrit la loi universelle de la gravitation, formule les trois lois universelles du mouvement et jette les bases de la mécanique classique. Il a aussi effectué des recherches dans les domaines de la théologie et de l'alchimie.

Hypothèse : On étudie uniquement des systèmes de masse constante.

I Forces

1.) Définition :

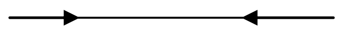
Une force peut : - mettre en mouvement un objet
- dévier la trajectoire d'un objet
- déformer un objet.

Une force est représentée par un vecteur $\vec{F}$. L'origine est le point d 'application de la force. La norme du vecteur donne la valeur de la force, avec une échelle appropriée. La direction et le sens sont ceux de la force.

2.) Forces à distance

a) Force d'interaction gravitationnelle : Loi d'attraction universelle (Newton 1687)

Deux points matériels M_1 et M_2 de masse gravitationnelle m_1 et m_2, et distants de r, exercent l'un sur l'autre une force attractive, appelée force d'interaction gravitationnelle :
$\vec{F}_{m_1 \to m_2} = -\mathcal{G}\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{e}_{12} = m_2 \vec{G}_1(M_2)$ $\mathcal{G}$ = 6,67. 10^{-11} N.m^2.kg^{-2} Constante de gravitation



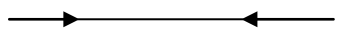
Champ de gravitation créé par m_1 en M_2 : $\vec{G}_1(M_2) = -\mathcal{G}\frac{m_1}{r^2}\vec{e}_{12}$

Poids : force gravitationnelle exercée par la terre sur M(m) $\vec{P} = m\vec{g}$ où $\vec{g} = -g\vec{e}_z$
$\vec{g}$ est le champ de pesanteur; $\vec{e}_z$ est suivant la verticale ascendante.
g =9,81 m.s^{-2} est l'accélération de la pesanteur au voisinage du sol, à une latitude λ = 45°.

b)Forces électromagnétiques

- force d'interaction électrostatique : Loi de Coulomb

Deux points matériels immobiles M_1 et M_2 de charge électrostatique q_1 et q_2, et distants de r, exercent l'un sur l'autre une force, appelée force d'interaction électrostatique :
$\vec{F}_{q_1 \to q_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{e}_{12} = q_2 \vec{E}_1(M_2)$ ε_0 = 8,854 . 10^{-12} F.m^{-1} Permittivité absolue du vide



Champ électrostatique créé par q_1 en M_2 : $\vec{E}_1(M_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r^2}\vec{e}_{12}$

Particule en mouvement dans un champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$: elle est soumise à la force de Lorentz
$\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$

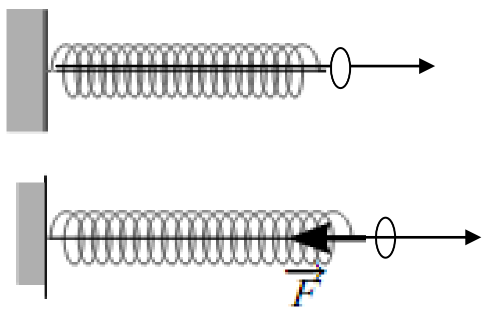
3.) Tension et force de rappel

a) Tension d'un fil

Le point matériel accroché à un fil est soumis à une force appelée Tension du fil $\vec{T}$, colinéaire au fil, si le fil est tendu.

b) Force de rappel d'un ressort

L'anneau accroché au ressort est soumis à une force appelée Force de rappel du ressort $\vec{F_r}$:
k est la constante de raideur du ressort, l_0 sa longueur à vide, l sa longueur à l'instant considéré,
$\vec{F_r} = -k(l - l_0)\vec{e}_x$ où le vecteur unitaire $\vec{e}_x$ est dans le sens de l'allongement du ressort. On peut poser x = l-l_0

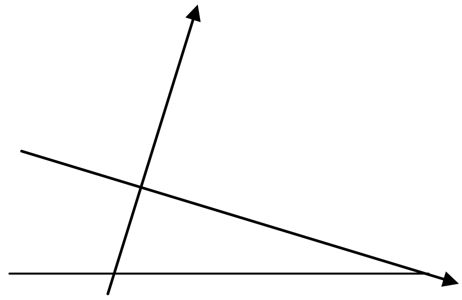


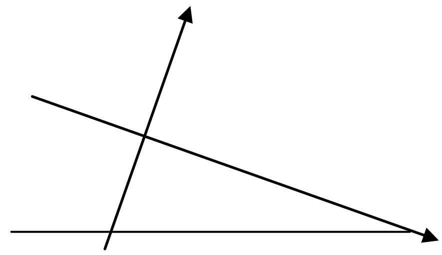
4.) Forces de contact (ou forces de liaison)

a) par le support solide

Si un point matériel ou un solide est soumis à se déplacer sur une courbe ou une surface, cela se traduit par :
- des relations supplémentaires sur les coordonnées d'espace
- une force exercée par le support sur le point matériel, appelée Force de contact : $\vec{R} = \vec{R}_T + \vec{R}_N$

$\vec{R}_N$ est la réaction du support ou composante normale, elle est perpendiculaire au support.
$\vec{R}_T$ est la force de frottement solide ou composante tangentielle, elle est colinéaire et de sens opposé à la vitesse.
$\left|\left|\vec{R}_T\right|\right| = f||\vec{R}_N||$ si v$\neq$ 0 et $\left|\left|\vec{R}_T\right|\right| \leq f_S||\vec{R}_N||$ sinon





b) par un fluide

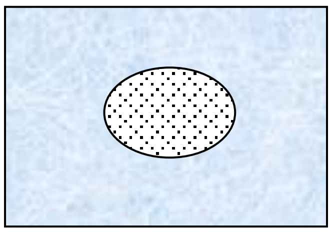
Force de frottement fluide sur un corps en mouvement : $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$ où α > 0 est le coefficient de frottement fluide.

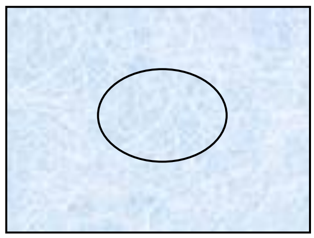
Poussée d'Archimède

Hypothèses Fluide ou ensemble de fluides quelconques (inhomogène, compressible) au repos dans un référentiel galiléen, soumis au champ de pesanteur uniforme.

Théorème d'Archimède : Les forces de pression exercées par un fluide, ou un ensemble de fluides, sur un corps totalement immergé sont équivalentes à une force unique, appelée Poussée d'Archimède égale à l'opposé du poids des fluides déplacés et appliquée au centre de poussée C (centre d'inertie du volume de fluide déplacé)
$\vec{\Pi} = -m_{fluide\ déplacé}\vec{g} = -\rho_{fluide}\mathcal{V}_{corps}\vec{g}$.

La pression augmente avec la profondeur : la pression est donc plus importante au niveau de la partie basse de la surface $\sum$.





Condition de validité du théorème d'Archimède

D'après la loi fondamentale de la statique des fluides, l'expression de la pression dans le fluide ne dépend que du champ de pesanteur. On admet que la pression exercée sur la surface $\sum$ est la même dans les deux cas.

II Quantités de mouvement

1.) Définition

a) Quantité de mouvement du point M(m) par rapport à un référentiel ℜ : $\vec{p}(M/\mathcal{R}) = m\vec{v}(M/\mathcal{R})$

Expérimentalement : La masse inerte se confond avec la masse gravitationnelle.

b) Quantité de mouvement d'un système de points $S = \{M_i\ (m_i)\}$ par rapport à un référentiel ℜ:

$$\vec{p}(Syst/\mathcal{R}) = \sum_i \vec{p}(M_i/\mathcal{R}) = m\vec{v}(G/\mathcal{R})$$

2.) Principe d'inertie (ou première loi de Newton) et référentiels

Principe d'inertie (ou première loi de Newton)

> Il existe au moins un référentiel privilégié appelé référentiel inertiel ou galiléen dans lequel le mouvement de tout point isolé est rectiligne et uniforme.

Propriété :

> L'ensemble des référentiels galiléens est constitué de tous les référentiels en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres.

En effet, si $\mathcal{R}$ est en translation rectiligne uniforme par rapport à $\mathcal{R}_0$, un mouvement rectiligne uniforme dans $\mathcal{R}_0$ est aussi rectiligne uniforme dans $\mathcal{R}$.

Référentiel de Copernic $\Re_c(C, \vec{e}_{xC}, \vec{e}_{yC}, \vec{e}_{zC})$

- origine : centre d'inertie du système solaire
- axes : direction de trois étoiles fixes de notre galaxie

Meilleur référentiel galiléen mis en évidence expérimentalement

Référentiel héliocentrique $\Re_H(S, \vec{e}_{xH}, \vec{e}_{yH}, \vec{e}_{zH})$

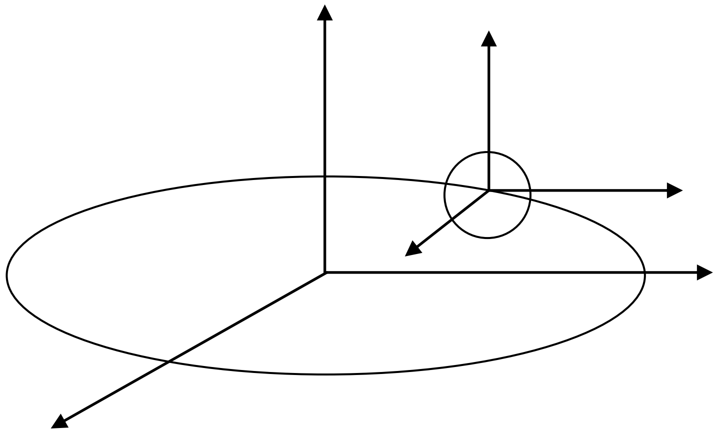
- origine : centre d'inertie du soleil
- axes : direction de trois étoiles fixes de notre galaxie

Décalé de $\overrightarrow{CS}$ par rapport à $\Re_C$, supposé galiléen avec une excellente approximation.

Référentiel géocentrique $\Re_O(O, \vec{e}_{xO}, \vec{e}_{yO}, \vec{e}_{zO})$

- origine : centre d'inertie de la terre
- axes : directions de trois étoiles fixes de notre galaxie

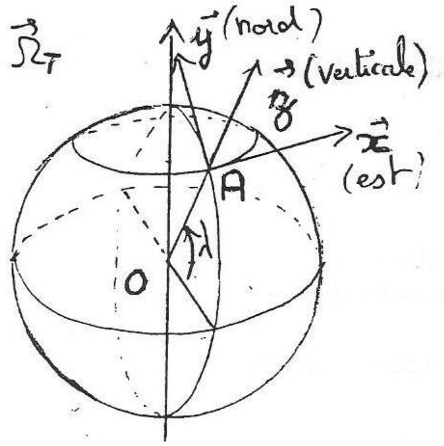
Mouvement de translation elliptique de $\Re_0/\Re_H$ de période 365,25 jours solaires.



Référentiel terrestre $\Re_T(A, \vec{e}_{xT}, \vec{e}_{yT}, \vec{e}_{zT})$

- origine : un point à la surface de la terre
- axes : directions fixes par rapport à la terre

Mouvement de rotation autour de l'axe des pôles de période un jour sidéral et rotation du centre d'inertie de la terre autour du soleil.



3.) Loi de la quantité de mouvement (ou deuxième loi de Newton)

a) Pour un point matériel M(m)

Par rapport à tout référentiel galiléen $\mathfrak{R}$, le mouvement d'un point matériel M de masse (inerte) m vérifie la relation : $\frac{d\vec{p}(M/\mathfrak{R})}{dt} = \sum \vec{F}$ appliquées au point M. Si m est constante, $m\vec{a}(M/\mathfrak{R}) = \sum \vec{F}$

b) Pour un système de points matériels S= {M_i (m_i)}

Par rapport à tout référentiel galiléen $\mathfrak{R}$, pour un système fermé de masse m, de centre d'inertie G,
$\frac{d\vec{p}(G/\mathfrak{R})}{dt} = \sum \vec{F}\,ext$ Si m est constante, $m\vec{a}(G/\mathfrak{R}) = \sum \vec{F}\,ext$

Propriété : Dans un référentiel galiléen, la quantité de mouvement d'un système isolé se conserve.

4.) Principe des actions réciproques (ou troisième loi de Newton).

Soient M_1 et M_2 deux points matériels en interaction. $\vec{f}_{1\to 2}$ est la force exercée par M_1 sur M_2 et $\vec{f}_{2\to 1}$ la force exercée par M_2 sur M_1.

Les forces d'interaction sont opposées et colinéaires à (M_1M_2).

$\vec{f}_{2\to 1} = -\vec{f}_{1\to 2}$ et $\overrightarrow{M_1M_2} \wedge \vec{f}_{1\to 2} = \vec{0}$

III Applications

1.) Méthode de résolution d'un problème de mécanique

1. Définir le système étudié.
   Définir le référentiel par rapport auquel on étudie le mouvement. Est-il galiléen ?

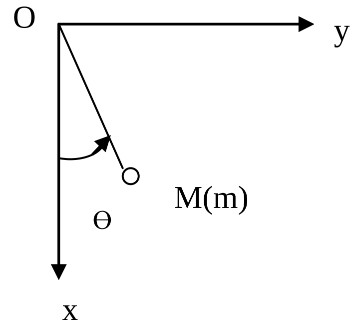
2. Bilan des forces appliquées (à distance, contact, tension, rappel)

3. Application des théorèmes généraux

4. Choix d'un repère de projection et projection dans ce repère.

5. Intégration des équations avec prise en compte des conditions initiales sur la position et la vitesse.

2.) Pendule simple



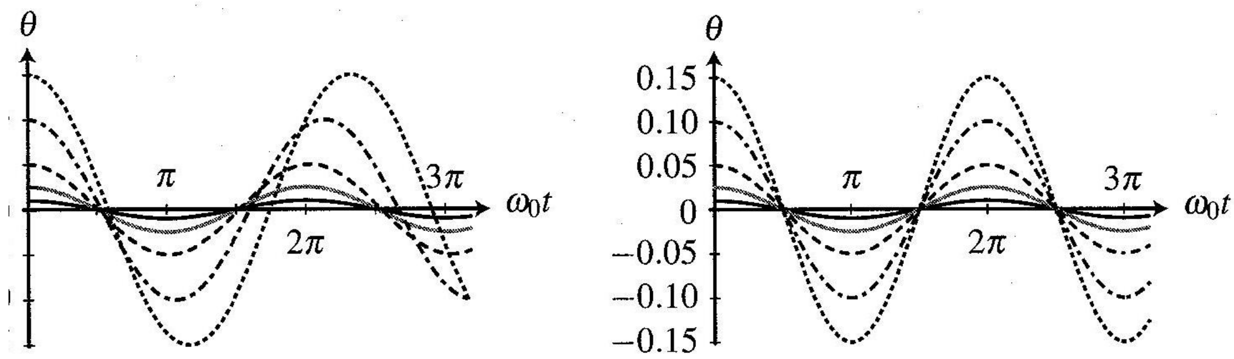


Figure 15.18 – Évolution temporelle de l'angle θ pour différentes conditions initiales. À gauche, l'amplitude des oscillations est comprise entre 0,1 et 1,5 rad ; à droite, elle est comprise entre 0,01 et 0,15 rad.

3.) Tir d'un projectile dans le champ de pesanteur uniforme

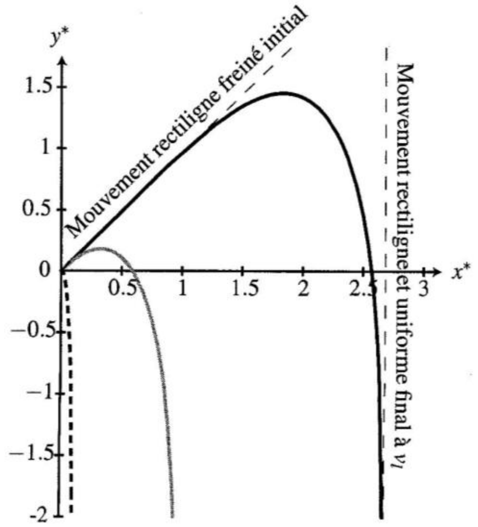


Figure 15.15 – Évolution de la trajectoire pour différentes vitesses initiales. L'angle de tir est fixé à 45° et la vitesse initiale prend les valeurs de $0,1v_l$ (tirets), v_l (trait continu gris) et $10v_l$ (trait continu noir).

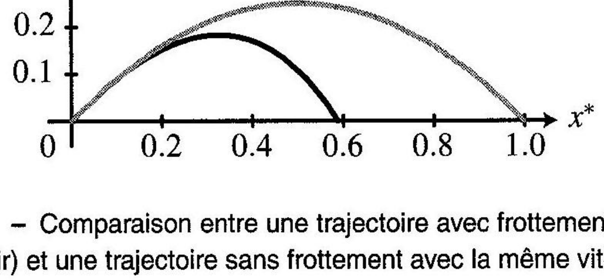
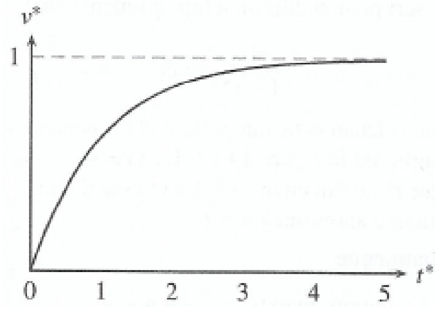


Figure 15.16 – Comparaison entre une trajectoire avec frottement pour laquelle $v_0 = v_l$ (en noir) et une trajectoire sans frottement avec la même vitesse initiale (en gris). Les frottements diminuent la portée sans changer fondamentalement la forme de la trajectoire. L'angle de tir est de 45° par rapport à l'horizontale.

IV Scripts python : Chute d'une bille, tir de projectile.

1.) Frottements en -αv. Ecriture d'une équation adimensionnée

Bille de vitesse initiale nulle, dans le référentiel terrestre galiléen



2.) Frottements en $-kv^2$. Résolution par la méthode d'Euler

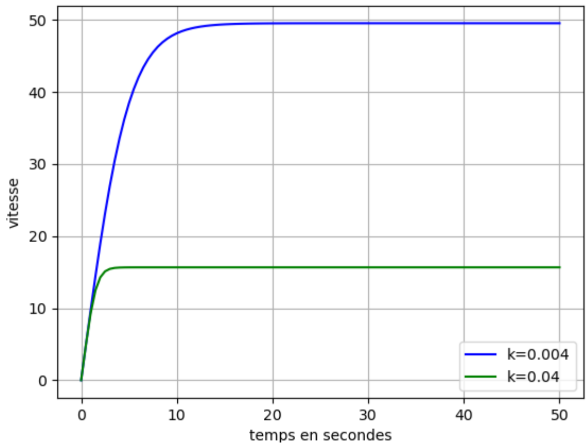
```
#MC2 chute d'une bille. méthode d'Euler. Permet d'obtenir les courbes données au TD MC2 exo 1
#Chute libre d'une bille avec résistance de l'air en -kv**2
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def ordre1_euler(k,V0, tmax, n):
```

```
##Tracé de la solution de la méthode d'Euler
g=9.81#m.s-2
m=1 #kg
tau=1
tmax=50*tau
V0=0 #vitesse initiale
n = 100 #MODIFIER LE NOMBRE DE POINTS
```

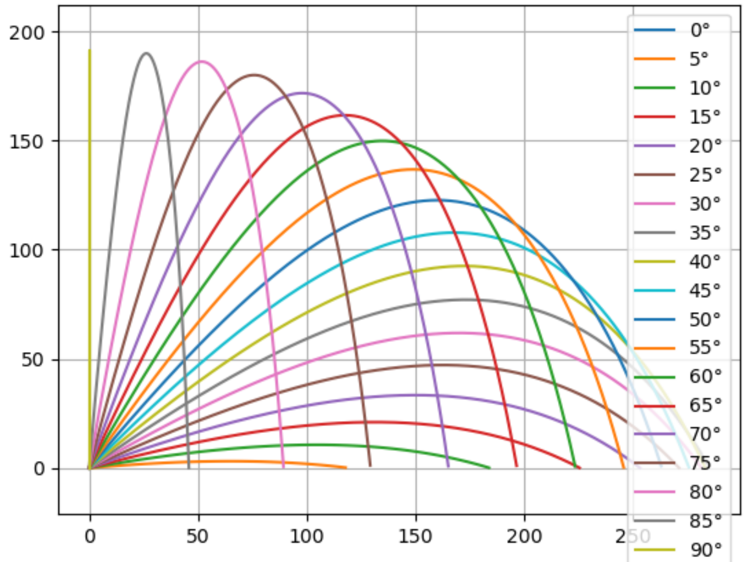
```
k = 0.004#kg/m-1
les_t, les_v = ordre1_euler( k,V0, tmax, n)
plt.plot(les_t, les_v, color='b',label='k=0.004')
k = 0.04#kg/m-1
les_t, les_v = ordre1_euler( k, V0,tmax, n)
plt.plot(les_t, les_v, color='g',label='k=0.04')

plt.xlabel('temps en secondes')
plt.ylabel('vitesse')
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```



<u>3.) Tir de projectile avec frottements en -k v² :</u>

On résout avec odeint : "MC2. boulet"




```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import scipy.integrate as spi

#Parametres
m=8 # kg
rho = 1.2 # kg/m**3 , air
Cx= .2 # sphere
S = 0.3 # m^2
g= 9.80 # m/s**2

# conditions initiales
theta0 = np.pi/4
v0 =100 # m/s
etat_initial = [x0,y0,vx0,vy0] = [0,0,v0*np.cos(theta0),v0*np.sin(theta0)]
#equadiff
def equadiff(etat,t):
        x,y,vx,vy = etat
        v2 = vx*vx + vy*vy
        theta = np.arctan2(vy,vx)
        F= 1/2 * rho * S * Cx * v2##force de frottement fluide
        Fx = -F* np.cos(theta)
        Fy = -F* np.sin(theta)
        ax= Fx/m
        ay= Fy/m - g
        derivee_de_l_etat = vx,vy,ax,ay
        return derivee_de_l_etat
tmax = 30 # > 2vo/g
t=np.linspace(0,tmax,1000) # instants de simulation

plt.close("all")
for theta in range(0,95,5):
        theta0 = theta * np.pi / 180
        etat_initial = [x0,y0,vx0,vy0] = [0,0,v0*np.cos(theta0),v0*np.sin(theta0)]
        x,y,vx,vy = spi.odeint(equadiff,etat_initial,t).T#☼le .T permet de remplir les 4 listes
        air = y>=0
        #print(theta,t[air.argmin()])
        plt.plot(x[air],y[air],label = str(theta)+"°") #pour ne tracer que les y>0
        #plt.plot(x,y,label = str(theta)+"°") #Pour tracer la courbe en entier
plt.grid()
plt.axis("equal")
plt.legend()
plt.show()
```