Résumé de cours Mécanique. MC3 Energie du point matériel

Hypothèse : point matériel M(m), soumis à la force $\vec{F}$, de vitesse $\vec{v}$, dans un référentiel $\Re$ quelconque.

Définition : Travail de $\vec{F}$ lorsque M se déplace de $M_1(t_1)$ à $M_2(t_2)$. $\boxed{W_{1\to2}(\vec{F}) = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}.\overrightarrow{dl}}$

Travail élémentaire de $\vec{F}$ lorsque M se déplace de $\overrightarrow{dl}$. $\boxed{\delta W = \vec{F}.\overrightarrow{dl}}$

Puissance de $\vec{F}$: $P(\vec{F}) = \frac{\delta W}{dt} = \vec{F}.\vec{v}$ Energie cinétique $\boxed{Ec(M/\Re) = \frac{1}{2} m v^2(M/\Re)}$

$P(\vec{F}) > 0$ Puissance motrice, ou travail moteur (= force motrice).

$P(\vec{F}) < 0$ Puissance résistante, ou travail résistant (= force résistante).

Forces qui ne travaillent jamais: Force magnétique $\vec{F}_m$, Réaction normale $\vec{R}_N$, Tension du fil $\vec{T}$ pour le pendule simple.

Théorème de l'énergie cinétique dans $\Re_g$ galiléen : $W_{1\to2}(\vec{F}) = E_c(t_2) - E_c(t_1)$

Théorème de la puissance cinétique dans $\Re_g$ galiléen $P(\vec{F}) = \frac{dE_c}{dt}$

Théorème de l'énergie cinétique sous forme infinitésimale dans $\Re_g$ galiléen $\delta W = dE_c$

Propriété : Si le travail de $\vec{F}$ lorsque M se déplace de $M_1(t_1)$ à $M_2(t_2)$ ne dépend pas du chemin suivi, mais uniquement des positions initiales et finales, la force est dite conservative et le travail s'écrit sous la forme :

$$\boxed{W_{1\to2}(\vec{F}) = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}.\overrightarrow{dl} = [-Ep]_{M_1}^{M_2}} \qquad \boxed{\delta W = \vec{F}.\overrightarrow{dl} = -dEp}$$

La fonction Ep est appelée Energie potentielle de M associée à $\vec{F}$. Elle est définie à une constante additive près. C'est une fonction des coordonnées d'espace.

Le travail d'une force conservative le long d'un trajet donné est égal à la diminution d'énergie potentielle. On dit que la force dérive d'une énergie potentielle. Pour une trajectoire fermée, W = 0.

Energie potentielle de pesanteur Epp = mgz+Cte si $\vec{e}_z$ est vers le haut.

Energie potentielle élastique $Epe = \frac{1}{2}kx^2 + Cte$ où x est l'allongement du ressort.

Hypothèse : Point matériel M(m), soumis à la résultante des forces $\vec{F} = \vec{F}_c + \vec{F}_{nc}$, dans un référentiel $\Re_g$ galiléen.

où : - $\vec{F}_c$ est la résultante des forces conservatives, de travail W_c dérivant de l'énergie potentielle totale Ep.

- $\vec{F}_{nc}$ est la résultante des forces non conservatives de travail W_{nc}.

Théorème de l'énergie mécanique dans un référentiel $\Re_g$ galiléen : $\boxed{[Em]_{M_1}^{M_2} = W_{nc}}$

où :Em = Ec + Ep est l'énergie mécanique du point matériel

Em est une fonction des coordonnées d'espace et de ses dérivées. Elle dépend du référentiel. Elle est définie à une constante additive près.

Théorème de l'énergie mécanique sous forme infinitésimale, dans un référentiel $\Re_g$ galiléen : $\boxed{dEm = \delta W_{nc}}$

Théorème de la puissance mécanique dans un référentiel $\Re_g$ galiléen : $\boxed{\frac{dEm}{dt} = P_{nc}}$

Propriété : L'énergie mécanique se conserve si toutes les forces qui travaillent dérivent d'une énergie potentielle. Elle est alors donnée par les conditions initiales.

Définition : On appelle intégrale première du mouvement toute quantité ne faisant intervenir que les coordonnées de la position et la vitesse et qui se conserve au cours du mouvement.

La conservation de l'énergie mécanique est une intégrale première du mouvement

Définition : Un point M est en équilibre dans un référentiel si sa vitesse est nulle à tout instant.

Propriété : M(m) est en équilibre dans un référentiel $\Re_g$ galiléen si la résultante des forces $\vec{F}$ est nulle à tout instant et si la vitesse initiale est nulle.

Définition : - Un point M est en équilibre stable si la force qui apparaît lorsqu'on l'écarte infiniment peu de sa position d'équilibre tend à l'y ramener.

- Dans le cas contraire, l'équilibre est dit instable.

- Si aucune force n'apparaît, l'équilibre est dit indifférent. Le point reste dans sa nouvelle position.

Hypothèse : Point M soumis à une force $\vec{F} = F(x)\vec{e}_x$ conservative, dérivant d'une énergie potentielle Ep(x), se déplaçant suivant un axe (Ox).

Propriété : Si un point E d'abscisse x = x_e est une position d'équilibre, alors

l'énergie potentielle Ep est extrémale en ce point : $\left(\dfrac{dEp}{dx}\right)(x = x_e) = 0$

L'équilibre est stable si Ep est minimale : $\left(\dfrac{d^2Ep}{dx^2}\right)(x = x_e) > 0$

Dans le cas inverse, l'équilibre est dit instable.

Si $\left(\dfrac{d^2Ep}{dx^2}\right)(x = x_e) = 0$, l'équilibre est dit indifférent.

Définition : On appelle oscillateur harmonique à une dimension tout système à un degré de liberté dont l'équation du mouvement est de la forme : $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ quelle que soit la nature physique de la variable x.

Propriété : Un oscillateur se comporte comme un oscillateur harmonique pour de petites oscillations autour d'une position d'équilibre stable.

Exemples à connaître : luge, pendule simple, puits et barrière de potentiel, anneau sur un cercle vertical.

Le gradient de l'énergie potentielle Ep, noté $\overrightarrow{grad}Ep$ est le vecteur tel que la variation de Ep lors d'un déplacement élémentaire $\overrightarrow{dl}$ s'écrit $dEp = \overrightarrow{grad}Ep.\overrightarrow{dl}$.
Si une force conservative dérive d'une énergie potentielle Ep, on a: $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}Ep$
Le vecteur $\overrightarrow{grad}\,Ep$ est orienté dans le sens où Ep croît le plus rapidement.

En coordonnées cartésiennes, Ep(x,y,z). La différentielle de Ep est la variation élémentaire de Ep associée à un déplacement élémentaire du point M :

dEp=Ep(x+dx, y+dy, z+dz)-Ep(x,y,z)

$dEp = \left.\dfrac{\partial E_p}{\partial x}\right)_{y,z} dx + \left.\dfrac{\partial E_p}{\partial y}\right)_{x,z} dy + \left.\dfrac{\partial E_p}{\partial z}\right)_{x,y} dz$

En coordonnées cartésiennes, $\overrightarrow{dl} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$
donc $\overrightarrow{grad}Ep = \left.\dfrac{\partial E_p}{\partial x}\right)_{y,z} \vec{e}_x + \left.\dfrac{\partial E_p}{\partial y}\right)_{x,z} \vec{e}_y + \left.\dfrac{\partial E_p}{\partial z}\right)_{x,y} \vec{e}_z$

Interaction gravitationnelle : $Ep(r) = -\dfrac{Gm_0m}{r}$ +cste

Interaction coulombienne : $Ep(r) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_0q}{r}$ +cste