1

5.) Exemple : Distance d'arrêt d'une luge

2 Système [luge, M(m)] Référentiel Terrestre Galiléen

Forces appliquées $\vec{P} = m\vec{g}$

$\vec{R_T}$ sur [BC] $\quad \vec{R_N} \perp$ au support

3 Coordonnées cartésiennes.

4 Théorème de Em entre A et C

$$EI \left| \begin{array}{l} v_A = v_0 \\ z_A \end{array} \right. \qquad EF \left| \begin{array}{l} v_C = 0 \\ z_C = 0 \end{array} \right.$$

$\Delta Em = W$ forces non conservatives.

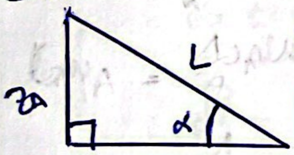
où $Em = Ec + Epp = \frac{1}{2}mv^2 + mgz + cste$

$W_{fnc} = W_{B\to C}(\vec{R_T})$

$Em(A) = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgz_A + cste$.

$Em(C) = 0 + 0 + cste$.

$\Delta Em = Em(C) - Em(A) = -\frac{1}{2}mv_0^2 - mgz_A$



$\sin\alpha = \frac{z_A}{L} \Rightarrow z_A = L\sin\alpha$

$$\boxed{\Delta Em = -\frac{1}{2}mv_0^2 - mgL\sin\alpha}$$

$W_{B\to C}(\vec{R_T}) = \int_B^C \vec{R_T}\cdot\vec{dl} = -\int_B^C R_T\,dx$ $\quad (W_{nc} = W(\vec{R_T}))$

car $\left| \begin{array}{l} \vec{R_T} = -R_T\vec{e_x} \\ \vec{dl} = dx\,\vec{e_x} \end{array} \right.$

$R_T = fR_N$ (force de frottement dyn)

LFD pour $M \in [BC]$

$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R_N} + \vec{R_T}$

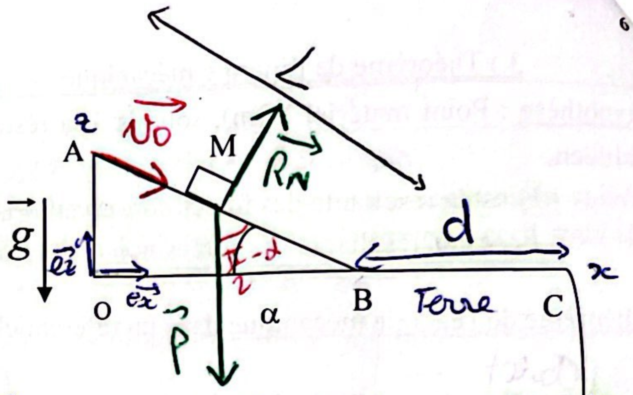
en projection /(Oz) $\Rightarrow ma_z = 0 = R_N - mg$

$\Rightarrow R_N = mg$

$W_{B\to C}(\vec{R_T}) = -\int_B^C fmg\,dx$

$= -fmg(x_C - x_B)$

$$\boxed{W(\vec{R_T}) = -fmgd}$$



Théorème de l'énergie mécanique

$\Rightarrow -\frac{1}{2}mv_0^2 - mgL\sin\alpha = -fmgd$

$\Rightarrow d = \frac{1}{fg}\left(\frac{v_0^2}{2} + gL\sin\alpha\right)$

$$\boxed{d = \frac{v_0^2}{2fg} + \frac{L\sin\alpha}{f}}$$

6.) Exemple :Pendule simple

① Syst [perle M(m)]. Ref terrestre galiléen.

② forces | $\vec{P} = m\vec{g}$

③ | $\vec{T}$ tension du fil

$\vec{T}$ ne travaille pas

$\vec{P}$ est conservative elle dérive de $E_{pp} = -mgx + cste$ ↓$\vec{e_x}$

Toutes les forces qui travaillent sont conservatives donc $E_m = cste$, $E_m = \frac{1}{2}mv^2 - mgx + cste$.

④ Coordonnées polaires.

$\vec{OM} = l\vec{e_r}$ $\vec{v} = l\dot{\theta}\vec{e_\theta}$ $x = \overline{OH} = l\cos\theta$

⑤ Conservation de E_m.

$E_m = \frac{1}{2}m\,l^2\dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta + cste$

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{1}{2}ml^2\frac{d\dot{\theta}^2}{dt} - mgl\frac{d\cos\theta}{dt}$$

$$① = \frac{1}{2}ml^2(2\dot{\theta}\ddot{\theta}) + mgl\sin\theta\dot{\theta}$$

$\frac{dE_m}{dt} = 0$ car $E_m = cste$

$$\Rightarrow l^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + gl\sin\theta\dot{\theta} = 0$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}\left(\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta\right) = 0$$

Soit $\dot{\theta} = 0 \Rightarrow \theta = cste$

Soit $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$ équa diff du mvt

oscillateur harmonique. $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$ pour de petites oscillations ($\theta \simeq \sin\theta$)

CI $t=0$ $\theta_0 = 0$ et $\vec{v}(t=0) = v_0\vec{e_y}$

$\theta(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$

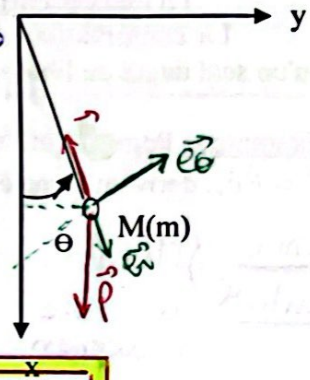
$\theta(0) = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow \theta(t) = b\sin(\omega t)$

$\dot{\theta}(t) = -a\omega_0\sin\omega_0(t) + b\cos(\omega_0 t)\omega_0$

or $\dot{\theta}(t=0) = \frac{v_0}{l}$.

$\Rightarrow \dot{\theta}(t_0) = b\omega_0 = \frac{v_0}{l}$

$\Rightarrow b = \frac{v_0}{l\omega_0}$



Ainsi $\boxed{\theta(t) = \frac{v_0}{l\omega_0}\sin(\omega_0 t)}$

et $\dot{\theta}(t) = \frac{v_0}{l}\cos(\omega_0 t)$

Rq : Petites oscillations si v_0 faible

• $\vec{T}$ peut être obtenue que par la LFD

Rq importante Avec frottements fluides.

$\vec{F_f} = -\alpha\vec{v}$

Théorème de la puissance mécanique

$$\frac{dE_m}{dt} = P_{nc} = \vec{F_f}\cdot\vec{v}$$

$\Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = -\alpha\vec{v}^2 < 0 \Rightarrow E_m \searrow$ au cours du temps

$\overset{①}{\Rightarrow}$ $ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgl\sin\theta\dot{\theta} = -\alpha l^2\dot{\theta}^2$

$\Rightarrow \dot{\theta}\left[ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta + \alpha l^2\dot{\theta}\right] = 0$

équa diff du mouvement.

$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \rightarrow$ (cf script python)

ou

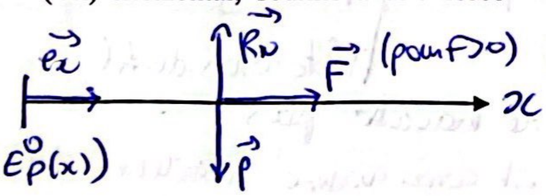
$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$ Pour des petites oscillations ($\theta \simeq \sin\theta$)

IV Mouvements conservatifs à une dimension

1.) Puits et barrière de potentiel

La conservation de l'énergie mécanique suffit à la mise en équation d'un mouvement ne possédant qu'un seul degré de liberté (c'est-à-dire décrit par une seule coordonnée).

Exemple : Point M(m) se déplaçant sans frottements selon un axe (Ox) horizontal, soumis à une force $\vec{F} = F\vec{e}_x$. dérivant d'une énergie potentielle Ep(x).



Système {M(m)}
Référentiel Terrestre Galiléen

Forces $\vec{P}$, $\vec{R_N}$, $\vec{F}$

$\vec{R_N}$ et $\vec{P}$ ne travaillent pas.
La seule force qui travaille étant conservative Em = cste
où $E_m = E_c + E_p(x)$

$E_m = \frac{1}{2} m v^2 + E_p(x)$

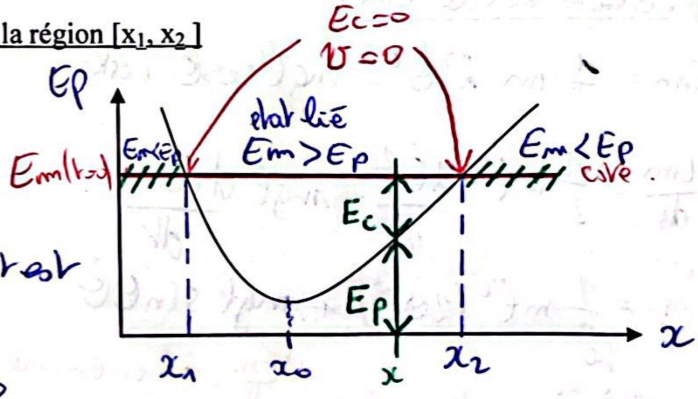
$\Rightarrow v^2 = \frac{2}{m}(E_m - E_p^0(x))$

les CI donnent $E_m = E_c(t=0) + E_p$ initiale.

$\boxed{v \text{ existe si } E_m \geq E_p(x)}$

$\Rightarrow$ Mouvement possible si $E_m \geq E_p(x)$

- **Puits de potentiel : La particule est confinée dans la région $[x_1, x_2]$**



- Sur $[0, x_1[$ et $]x_2, +\infty[$, $E_m < E_p$
$\Rightarrow v^2 < 0$ le mouvement est donc impossible.
- Sur $[x_1, x_2]$ $v^2 \geq 0$, le mouvement est possible.

Pour $x = x_1$ et $x = x_2$ $E_c = 0 \Leftrightarrow v = 0$

La particule reste dans $[x_1, x_2]$, on dit qu'elle est confinée.

ex

M(m)

$\vec{F_r} = -k(l - l_0)\vec{e_x}$

$\left| \begin{array}{l} x = OM \\ x_0 = l_0 \end{array} \right. \Rightarrow \vec{F_r} = -k(x - x_0)\vec{e_x}$

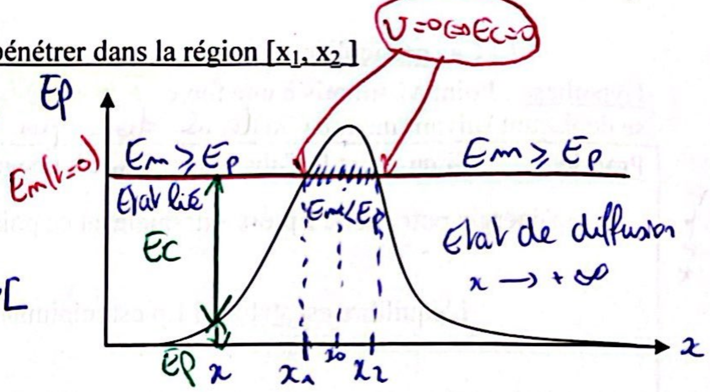
$E_p = \frac{1}{2} k (l - l_0)^2 + \text{cste}$.

$\Rightarrow E_p = \frac{1}{2} k (x - x_0)^2 + \text{cste}$

forme parabolique

- Barrière de potentiel : La particule ne peut pas pénétrer dans la région $[x_1, x_2]$

• La particule ne peut pas pénétrer dans $]x_1, x_2[$
• La particule reste sur $[0, x_1]$ ou $[x_2, +\infty[$



Ex : 0 1er cas M(m q) ion de charge $q_0 > 0$ x_0 2e cas M(m q)

$\vec{F}_{q_0 \to q}$ $\vec{F}_{q_0 \to q}$

force électrostatique répulsive entre charges du même signe de racine.

$$\boxed{F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{q_0 q}{r^2}}$$ où $r = M_0M$.

$$Ep = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{q_0 q}{r} + cste$$ cf p15

2.) Condition d'équilibre et de stabilité

Définition : Un point M est en équilibre dans un référentiel si sa vitesse est nulle à tout instant.

• $\forall t \ \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \forall t \ \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$

LFD $\Rightarrow m\vec{a} = \vec{F} = \vec{0}$ résultante des forces.

• $\vec{F} = \vec{0}$ résultante des forces.

$\Rightarrow$ LFD $\vec{a} = \vec{0} \ \forall t \Rightarrow \vec{v} = cste$.

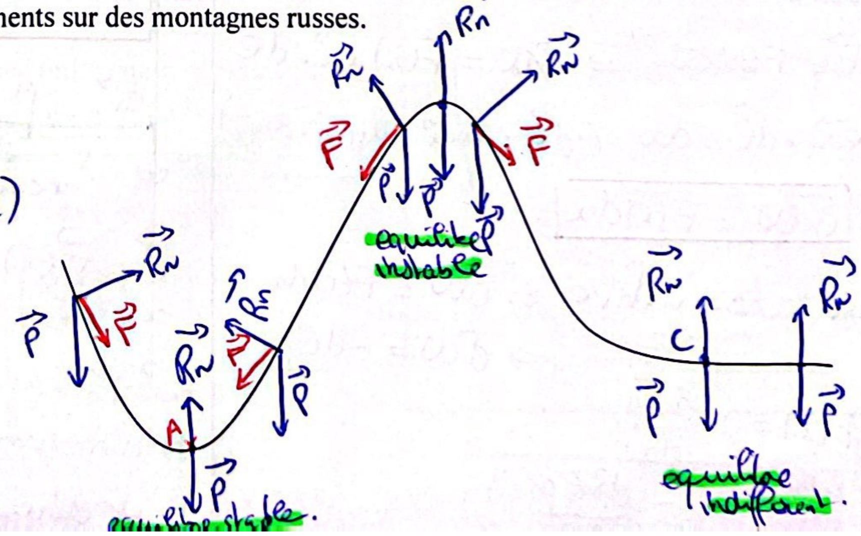
Propriété : M(m) est en équilibre dans un référentiel $\Re_g$ galiléen si la résultante des forces $\vec{F}$ est nulle à tout instant et si la vitesse initiale est nulle.

***

Définition : - Un point M est en équilibre stable si la force qui apparaît lorsqu'on l'écarte infiniment peu de sa position d'équilibre tend à l'y ramener. - Dans le cas contraire, l'équilibre est dit instable. - Si aucune force n'apparaît, l'équilibre est dit indifférent. Le point reste dans sa nouvelle position.

Exemple : Charriot glissant sans frottements sur des montagnes russes.

Ref terrestre galiléen
Forces $\vec{P}$, $\vec{R_n}$
$(\vec{F} = \vec{P} + \vec{R_n}$ hors équilibre$)$



3.) Cas particulier

Hypothèse : Point M soumis à une force $\vec{F} = F(x)\vec{e}_x$ conservative, dérivant d'une énergie potentielle Ep(x), se déplaçant suivant un axe (Ox) (seule force qui travaille).

Propriété : Si un point E d'abscisse $x = x_e$ est une position d'équilibre, alors l'énergie potentielle Ep est extrémale en ce point : $\left(\frac{dEp}{dx}\right)(x = x_e) = 0$

L'équilibre est stable si Ep est minimale : $\left(\frac{d^2Ep}{dx^2}\right)(x = x_e) > 0$

L'équilibre est instable si Ep est maximale : $\left(\frac{d^2Ep}{dx^2}\right)(x = x_e) < 0$

L'équilibre est indifférent. si $\left(\frac{d^2Ep}{dx^2}\right)(x = x_e) = 0$

Equilibre Stable

x		x_e	
Ep	↘	max $Ep(x_e)$	↗
$\frac{dEp}{dx}$	$-$	0	$+$
$\frac{d^2Ep}{dx^2}$		$+$	

Equilibre instable

x		x_e	
Ep	↗	$Ep(x_e)$ min	↘
$\frac{dEp}{dx}$	$+$	0	$-$
$\frac{d^2Ep}{dx^2}$		$-$	

DEMO

Travail élémentaire $\delta W = \vec{F}\cdot\vec{d\ell}$

or $\vec{F} = F(x)\vec{e_x} \Rightarrow \delta W = F(x)\,\vec{e_x}\cdot\vec{d\ell}$

Or $\vec{e_x}\cdot\vec{d\ell} = dx$ $\quad(\vec{d\ell} = dx\vec{e_x} + dy\vec{e_y} + dz\vec{e_z})$

$\Rightarrow \boxed{\delta W = F(x)dx}$.

$\vec{F}$ est conservative $\Rightarrow \delta W = F(x)dx$

$\Rightarrow \delta W = -dEp$

(1) $\Rightarrow F(x) = -\frac{dEp}{dx}$

(2) $\Rightarrow \frac{dF}{dx} = -\frac{d^2Ep}{dx^2}$

En $x = x_e$, on suppose qu'on a une position d'équilibre stable

• Equilibre $F(x_e) = 0$ (3)

(1) $\Rightarrow \boxed{\left(\frac{dEp}{dx}\right)(x_e) = 0}$ Ep est extremale en x_e.

• Condition Stabilité

On écarte M(x) légèrement de sa position d'équilibre

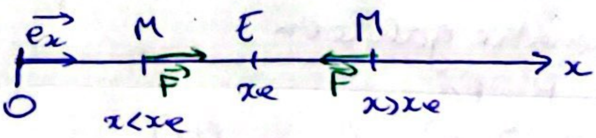
def de la dérivée $\rightarrow \left(\frac{dF}{dx}\right)(x_e) = \lim_{x\to x_e}\left[\frac{F(x)-F(x_e)}{x-x_e}\right]$

On se place au voisinage de x_e

$\left(\frac{dF}{dx}\right)(x_e) \simeq \frac{F(x)-F(x_e)}{x-x_e}$

$\Rightarrow F(x) \simeq \underbrace{F(x_e)}_{=0\ (3)} + (x-x_e)\left(\frac{dF}{dx}\right)(x_e)$

(2) $\Rightarrow \boxed{F(x) \simeq -(x-x_e)\times\left(\frac{d^2Ep}{dx^2}\right)(x_e)}$



$\vec{F} = F(x)\vec{e_x}$

$x > x_e \quad F(x) < 0$
$x < x_e \quad F(x) > 0$ $\quad\rightarrow \left(\frac{d^2Ep}{dx^2}\right)(x_e) > 0$

Minimum local d'Ep

$\vec{F}$ est dirigée vers ce minimum donc dans le sens des Ep ↘

4.) Définition générale de l'oscillateur harmonique

Définition : On appelle oscillateur harmonique à une dimension tout système à un degré de liberté dont l'équation du mouvement est de la forme : $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ quelle que soit la nature physique de la variable x(t)

Propriété : Un oscillateur se comporte comme un oscillateur harmonique pour de petites oscillations autour d'une position d'équilibre stable.

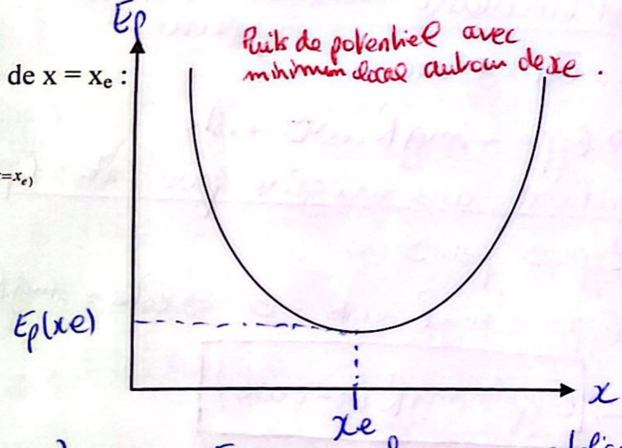
Hypothèse : Oscillateur à une dimension, dont la position est donnée par une seule coordonnée x, soumis à une force $\vec{F} = F(x)\vec{e}_x$ conservative, dérivant d'une énergie potentielle Ep(x). $\vec{F}$ est la seule force qui travaille.

Soit x_e correspondant à une position d'équilibre stable du système.

Expression de l'énergie potentielle :

Développement limité de Ep(x) au second ordre, au voisinage de $x = x_e$:

$$Ep(x) \approx Ep(x_e) + (x - x_e)\left(\frac{dEp}{dx}\right)_{(x=x_e)} + \frac{(x-x_e)^2}{2}\left(\frac{d^2Ep}{dx^2}\right)_{(x=x_e)}$$



Ep présente un minimum local en $x_e = x$

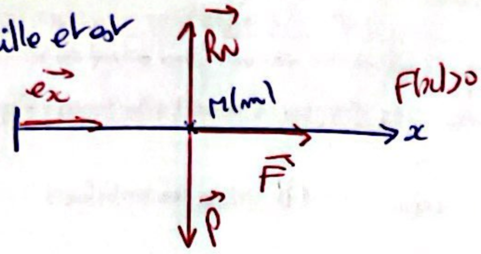
Tableau de variation cf (10) $\Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{dEp}{dx}\right)(x=x_e) = 0 \\ \left(\frac{d^2Ep}{dx^2}\right)(x=x_e) > 0 \end{cases}$

$Ep(x) = Ep(x_e) + \frac{1}{2}(x-x_e)^2 \times K$ où $K = \left(\frac{d^2Ep}{dx^2}\right)(x=x_e) > 0$ Ep a une forme parabolique tournée vers le haut.

Syst $\{M(m)\}$

Forces $\vec{R_n}, \vec{F}, \vec{P}$

$\vec{P}$ et $\vec{R_n}$ ne travaillent pas $\vec{F}$ travaille et est conservative.



$\vec{OM} = x\vec{e_x}$

$\vec{v} = \dot{x}\,\vec{e_x}$

Conservation de Em, car la seule force qui travaille est conservative

$E_m = E_c + E_{pp}$ où $E_c = \frac{1}{2}mv^2$

$E_p(x) = E_p(x_e) + \frac{1}{2}K(x-x_e)^2$

$\Rightarrow E_m \simeq \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + E_p(x_e) + \frac{1}{2}K(x-x_e)^2$

$X = x - x_e \quad \dot{X} = \dot{x}$

$\Rightarrow E_m \simeq \frac{1}{2}m\dot{X}^2 + E_p(x_e) + \frac{1}{2}K(X)^2$

$\frac{dE_m}{dt} = \frac{1}{2}m(2\dot{X}\ddot{X}) + \frac{1}{2}K(2X\dot{X}) = 0$

$\Rightarrow m\dot{X}\ddot{X} + KX\dot{X} = 0$

$\Rightarrow \dot{X}(\ddot{X} + \frac{K}{m}X) = 0$

Soit $\dot{X} = 0$ $X = cste$

Soit equa diff du mvt $\boxed{\ddot{X} + \frac{K}{m}X = 0}$

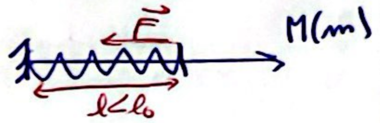
Oscillateur harmonique pour de petites oscillations autour d'1 position d'équilibre stable

$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$ et $K = \left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)(x_e) > 0$

Rq: Pour le ressort horizontal

$E_{pe} = \frac{1}{2}kx^2 + cste$

où $x = l - l_0$



$E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 + cste$

$\frac{dE_m}{dt} = \frac{1}{2}m\dot{x}\ddot{x}2 + \frac{1}{2}k2x\dot{x}$

$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$ (valable aussi pour de grandes oscillations)

5.) Anneau sur un guide circulaire

Syst $\left\{\begin{array}{l}\text{Anneau, } M(m) \\ \text{rayon } R.\end{array}\right\}$ Ref terrestre galiléen.

forces $\vec{P} = m\vec{g}$ $\vec{R_N}$ ($\perp$ au support)

$\vec{P}$ dérive de $E_{pp} = -mgx + cste$

Mvt circulaire $\Longrightarrow$ coordonnées polaires.

$x = \overline{OH} = R\cos\theta$

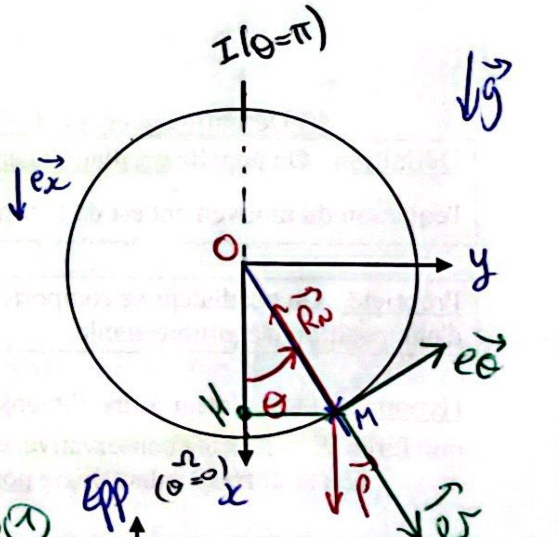
$\Rightarrow E_{pp} = -mgR\cos\theta + cste.$

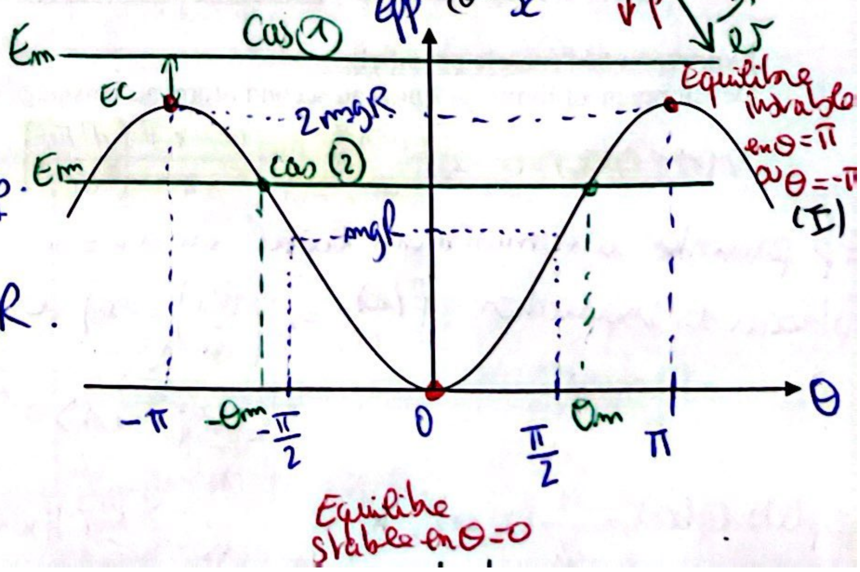
On choisit une origine pour les Ep.

$E_{pp} = 0$ pour $\theta = 0$

$E_{pp} = -mgR + cste = 0 \Rightarrow cste = mgR.$

$\Rightarrow \boxed{E_{pp} = mgR(1-\cos\theta)}$





La seule force qui travaille étant conservative, Em est constante.

$Em = Ec + Epp$ où $Ec = \frac{1}{2}mv^2$

$Em = \frac{1}{2}mv^2 + Epp$.

$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = Em - Epp$.

$\Rightarrow v^2 = \frac{2}{m}(Em - Epp)$

v existe, le mouvement est possible uniquement si $Em > Epp$.

CI on lance l'anneau du pt Ω avec une vitesse horizontale $\vec{v_0} = v_0\vec{e_y}$

$Em(t=0) = \frac{1}{2}mv_0^2 + \underbrace{Epp(\Omega)}_{=0}$
$= \frac{1}{2}mv_0^2$

Cas 1 $Em > Epp_{max}$ $\Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 > 2mgR$.

mouvement circulaire révolutif $\Rightarrow v_0^2 > 4gR$.
$\Rightarrow v_0 > \sqrt{gR} \times 2$

L'anneau tourne sans s'arrêter dans le sens indiqué par v_0.

Cas 2 $Em < Epp_{max}$ $v_0 < 2\sqrt{gR}$
Mouvement circulaire oscillatoire.

On trouve $\begin{cases} v=0 \\ Ec=0 \end{cases}$ pour $Em = Epp$. $(\theta = \theta_m)$

$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 = mgR(1-\cos\theta_m)$

$\Rightarrow \frac{mv_0^2}{gR} = 1 - \cos\theta_m$

$\Rightarrow \boxed{\cos\theta_m = -\frac{mv_0^2}{2gR} + 1}$

On peut vérifier que $\cos\theta_m < 1$.

Cas 3 $Em = Epp_{max}$. (en haut de la courbe)
Théoriquement l'anneau s'arrête au point I

↳ équilibre instable Em pratique, il y reste 1 temps aléatoire, p repart en oscillations/révolutions (imprévisible)

IMPORTANT

Rq1 Equation différentielle du mvt.

$Em = Ec + Epp$.

$\vec{OM} = R\vec{e_r}$ $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e_\theta}$

$Ec = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2$

$\Rightarrow Em = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mgR(1-\cos\theta)$

$\frac{dEm}{dt} = \frac{1}{2}mR^2 2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgR(\cancel{0} + \dot{\theta}\sin\theta)$

$\frac{dEm}{dt} = 0 = [mR^2\ddot{\theta} + mgR\sin\theta]\dot{\theta}$

Soit $\dot{\theta} = 0$
Soit $\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\sin\theta = 0$

Hypothèse petites oscillations $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\theta = 0}$

Rq 2 Position d'équilibre stable en $\theta = 0$ $Epp = mgR(1-\cos\theta)$

DL à l'ordre 2 de $\cos\theta$ autour de 0 $\boxed{\cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}}$

$\Rightarrow Epp \simeq mgR(1 - 1 + \frac{\theta^2}{2}) \simeq mgR\frac{\theta^2}{2}$

Autour de $\theta = 0$, Epp est parabolique.

$Em = Ec + Epp \simeq \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mgR\frac{\theta^2}{2}$

$\frac{dEm}{dt} = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}\ddot{\theta}2 + \frac{mgR}{2}2\theta\dot{\theta} = 0$

$\Rightarrow \dot{\theta}(\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\theta) = 0$

Oscillateur harmonique pour de petites oscillations autour d'une position d'équilibre