V Gradient d'énergie potentielle. Lien avec une force conservative.

1.) Définition

Le gradient de l'énergie potentielle Ep, noté $\overrightarrow{grad}Ep$ est le vecteur tel que la variation de Ep lors d'un déplacement élémentaire $\overrightarrow{dl}$ s'écrit $dEp = \overrightarrow{gradEp}.\overrightarrow{dl}$.
Propriété : Si une force conservative dérive d'une énergie potentielle Ep, on a : $\vec{F} = -\overrightarrow{gradEp}$

Remarque : Le vecteur $\overrightarrow{grad}\ Ep$ est orienté dans le sens où Ep croît le plus rapidement.

Force conservative

Travail élémentaire

$\delta W = \vec{F}.\vec{dl} = -dEp$. (1)

$\left(W_{1\to 2} = \int \vec{F}.\vec{dl} = [-Ep]_{M_1}^{M_2} \right)$

Def du gradient $dEp = \overrightarrow{grad}Ep.\vec{dl}$

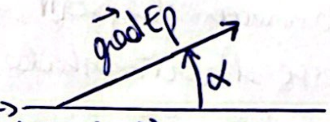
(1) $\Rightarrow \delta W = \vec{F}.\vec{dl} = -\overrightarrow{grad}\,Ep.\vec{dl}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\ Ep}$

Rq $dEp = \overrightarrow{grad}\ Ep.\vec{dl}$

Produit Scalaire

$dEp = \|\overrightarrow{grad}\ Ep\| \times \|\vec{dl}\| \cos\alpha$



$\vec{dl} = \overrightarrow{MM'}$ où M' est proche de M

Si $\overrightarrow{grad}Ep \perp \vec{dl}$, $dEp = 0$

$\Rightarrow Ep = cste$ i.e $\overrightarrow{grad}\ Ep \perp$ aux surfaces équipotentielles (surfaces sur lesquelles Ep = cste)

• dEp max si $\overrightarrow{grad}\ Ep$ et $\vec{dl}$ sont colinéaires et de m sens.

$\Rightarrow Ep \nearrow$ dans le sens de $\overrightarrow{grad}\ Ep$.

En coordonnées cartésiennes, Ep(x,y,z)
La différentielle de Ep est la variation élémentaire de Ep associée à un déplacement élémentaire du point M :
dEp=Ep(x+dx, y+dy, z+dz)-Ep(x,y,z)

$$dEp = \left.\frac{\partial E_p}{\partial x}\right)_{y,z} dx + \left.\frac{\partial E_p}{\partial y}\right)_{x,z} dy + \left.\frac{\partial E_p}{\partial z}\right)_{x,y} dz$$

$\left.\frac{\partial Ep}{\partial x}\right|_{y,z}$ dérivée partielle de Ep par rapport à x

$\partial \neq \delta$

$\rightarrow$ dérivée de Ep/x avec y et z étant supposées constantes.

Pour calculer dEp,

on fait varier chaque variable d'espace indépendamment et on somme les variations $Ep(x,y,z)$

En coordonnées cartésiennes, $\overrightarrow{dl} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$
donc $\overrightarrow{grad}Ep = \left.\frac{\partial E_p}{\partial x}\right)_{y,z} \vec{e}_x + \left.\frac{\partial E_p}{\partial y}\right)_{x,z} \vec{e}_y + \left.\frac{\partial E_p}{\partial z}\right)_{x,y} \vec{e}_z$

$\vec{dl} = dx\vec{e_x} + dy\vec{e_y} + dz\vec{e_z}$

$dEp = \overrightarrow{grad}\ Ep.\vec{dl}$

$= (\overrightarrow{grad}Ep)_x dx + (\overrightarrow{grad}\ Ep)_y dy + (\overrightarrow{grad}\ Ep)_z dz$

On identifie avec $dEp = \left.\frac{\partial Ep}{\partial x}\right|_{y,z} dx + \left.\frac{\partial Ep}{\partial y}\right)_{z,x} dy + \left.\frac{\partial Ep}{\partial z}\right)_{y,x} dz$

$\Rightarrow \overrightarrow{grad}\ Ep \left(\left.\frac{\partial Ep}{\partial x}\right|_{y,z}, \left.\frac{\partial Ep}{\partial y}\right|_{x,z}, \left.\frac{\partial Ep}{\partial z}\right|_{x,y} \right)$

Remarque : L'expression du gradient sera fournie dans les autres systèmes de coordonnées.

$\overrightarrow{grad}Ep = \left.\frac{\partial E_p}{\partial r}\right)_{\theta,z} \vec{e}_r + \frac{1}{r}\left.\frac{\partial E_p}{\partial \theta}\right)_{r,z} \vec{e}_\theta + \left.\frac{\partial E_p}{\partial z}\right)_{r,\theta} \vec{e}_z$ en coordonnées cylindriques

$\overrightarrow{grad}Ep = \left.\frac{\partial E_p}{\partial r}\right)_{\theta,\varphi} \vec{e}_r + \frac{1}{r}\left.\frac{\partial E_p}{\partial \theta}\right)_{r,\varphi} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\left.\frac{\partial E_p}{\partial \varphi}\right)_{r,\theta} \vec{e}_\varphi$ en coordonnées sphériques

2.) Exemples

① **Poids** $E_{pp} = mgz + cste$ $\uparrow \vec{e_z}$

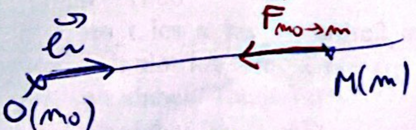
$\vec{P}$ dérivée de E_{pp}

$\Leftrightarrow \vec{P} = -\overrightarrow{grad}\, E_{pp}$

Ici $E_{pp}(z) \Rightarrow \overrightarrow{grad}\, E_{pp} = \frac{dE_{pp}}{dz}\vec{e_z} = mg\vec{e_z}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{P} = -mg\vec{e_z}}$ $\vec{g}\downarrow \vec{e_z}\uparrow$

② **Energie Potentielle : Interaction Gravitationnelle**



$\vec{F}_{m_0\to m} = -\mathcal{G}\frac{m_0 m}{r^2}\vec{e_r}$

Coordonnées sphériques.

Travail élémentaire. $\delta W = \vec{F}.\vec{dl}$

$\Rightarrow \delta W = -\mathcal{G}\frac{m_0 m}{r^2}dr$ (où $\vec{dl} = dr\vec{e_r} + \dots$)

$= d\left[\mathcal{G}\frac{m_0 m}{r} + cste\right]$

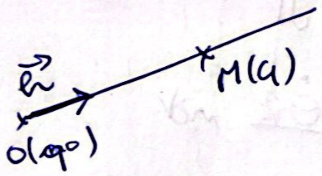
$\exists\, E_p$ tq $\delta W = -dE_p$.

$\Rightarrow \boxed{E_p = -\mathcal{G}\frac{m_0 m}{r} + cste.}$

Energie potentielle d'interaction gravitationnelle

Rq $W_{M_1\to M_2} = \int_{r_1}^{r_2} -\mathcal{G}\frac{m m_0}{r^2}dr = [-E_p]_{r_1}^{r_2}$

③ **Energie Potentielle : Interaction Electrostatique**



$\vec{F}_{q_0\to q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{q_0 q}{r^2}\vec{e_r}$

$\delta W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{q_0 q}{r^2}dr$

$= d\left[\frac{-q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r} + cste\right]$

$\exists\, E_p$ tq $\delta W = -dE_p$

$\Rightarrow E_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{q_0 q}{r} + cste$

VI. Méthode d'Euler appliquée à un oscillateur d'ordre 2

1.) Principe

Pour l'équation différentielle du pendule simple :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\alpha}{m}\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0 \quad \text{soit} \quad \underbrace{\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\xi\omega_0\frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2\sin\theta = 0}_{3^e \text{ forme canonique.}}$$ equadiff III.6)

$t_{k+1} = t_k + h.$

$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\theta_{k+1} - \theta_k}{h}$ noté $\dot\theta_k$

$\Rightarrow \boxed{\theta_{k+1} = \theta_k + h\dot\theta_k}.$

① $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -2\xi\omega_0\frac{d\theta}{dt} - \omega_0^2\sin\theta$ - noté $\ddot\theta_k$

or $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{\dot\theta_{k+1} - \dot\theta_k}{h}$

$\Rightarrow \boxed{\dot\theta_{k+1} = \dot\theta_k + h\ddot\theta_k}$

① $\Rightarrow \dot\theta_{k+1} = \dot\theta_k + h(-2\xi\omega_0\dot\theta_k - \omega_0^2\sin\theta_k)$

$\Rightarrow \dot\theta_{k+1} = \dot\theta_k + h\underbrace{\omega_0^2\left(-\frac{2\xi}{\omega_0}\dot\theta_k - \sin\theta_k\right)}_{F}$

résolution avec odeint

$\Rightarrow$ définition d'1 fonction F (correspondant à $\ddot\theta_k$)