Vacances Février : maths.

Un exercice non corrigé du TD11

`Dans la suite, en italique, des remarques pour aider à comprendre comment marche le raisonnement.`

Énoncé : Soit f une fonction continue sur un intervalle I, à valeurs dans I.
On suppose que $f \circ f$ admet un point fixe. Montrer que f admet aussi un point fixe.

Comme d'habitude, on se concentre sur ce que l'on veut démontrer. Comment prouver l'existence d'un point fixe pour f ?

On pose $\varphi : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - x \end{array}$. Montrons que φ s'annule au moins une fois sur I.

Cet énoncé colle avec le TVI. Commençons par traduire mathématiquement les hypothèses pour voir les outils dont on dispose.

Il existe un réel α de I tel que $f \circ f(\alpha) = \alpha$ *i.e.* $f(f(\alpha)) = \alpha$.
Bien sûr, si $f(\alpha) = \alpha$ alors on a fini !
Supposons dans la suite que $f(\alpha) \neq \alpha$.

Il y a un point, autre que α qui semble intéressant, c'est $f(\alpha)$. Donnons-lui un nom.

On note $\beta = f(\alpha)$. On a : $f(\alpha) = \beta$ et aussi $f(\beta) = \alpha$.

On a deux points intéressants : α et β. Or, pour le TVI, on a besoin d'un segment. Lançons-nous !

φ est continue sur le segment de bornes α et β (c'est $[\alpha, \beta]$ si $\alpha < \beta$, $[\beta, \alpha]$ si $\alpha > \beta$).
De plus, $\varphi(\alpha) = f(\alpha) - \alpha = \beta - \alpha$ et $\varphi(\beta) = f(\beta) - \beta = \alpha - \beta = -\varphi(\alpha)$. Ainsi, $\varphi(\alpha)$ et $\varphi(\beta)$ sont de signe contraire.
Donc, par le théorème des valeurs intermédiaires : il existe un réel c entre α et β tel que $\varphi(c) = c$ *i.e.* $f(c) = c$.
Ainsi, f admet au moins un point fixe.

Calculs en autonomie

1°) $3^\pi > \pi^3 \iff \pi \ln(3) > 3 \ln(\pi) \iff \dfrac{\ln(3)}{3} > \dfrac{\ln(\pi)}{\pi}$.

On pose : $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\ln x}{x} \end{array}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x > 0, f'(x) = \dfrac{1 - \ln(x)}{x^2}$.

$$\begin{aligned} f'(x) \geq 0 &\iff \ln x \leq 1 \\ &\iff x \leq e \qquad \text{car ln est strictement croissante} \end{aligned}$$

De même, $f'(x) = 0 \iff x = e$.
f est strictement décroissante sur $[e, +\infty[$. Or $e \leq 3 < \pi$ donc $f(3) > f(\pi)$. Ainsi, $3^\pi > \pi^3$.

2°) f est dérivable en 0 donc f admet un $DL_1(0)$ donné par : $f(x) \underset{x\to0}{=} f(0)+f'(0)x+o(x)$.

Comme $2x \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$: $f(2x) \underset{x\to0}{=} f(0)+2f'(0)x+o(x)$.

$$\begin{aligned}\frac{f(2x)-f(x)}{x} &\underset{x\to0}{=} \frac{f(0)+2f'(0)x+o(x)-(f(0)+f'(0)x+o(x))}{x}\\ &\underset{x\to0}{=} \frac{f'(0)x+o(x)}{x}\\ &\underset{x\to0}{=} f'(0)+o(1)\end{aligned}$$

Ainsi, $\dfrac{f(2x)-f(x)}{x} \underset{x\to0}{\longrightarrow} f'(0)$.

3°) ★ Soit $x\in\mathbb{R}, x-x^2\geq 0 \iff x(1-x)\geq 0 \iff x\in[0,1]$ (cf. trinôme du second degré + racines + signe du coeff de x^2).

Soit alors $x\in[0,1]$.

$$\begin{aligned} f(x) \text{ existe} &\iff -1\leq 2\sqrt{x-x^2}\leq 1\\ &\iff |2\sqrt{x-x^2}|\leq 1\\ &\iff 4(x-x^2)\leq 1 \qquad \text{car les termes précédents sont positifs}\\ &\iff 4x^2-4x+1\geq 0\\ &\iff (2x-1)^2\geq 0\end{aligned}$$

Or $(2x-1)^2\geq 0$ donc $f(x)$ existe et ceci pour tout $x\in[0,1]$.

Ainsi, f est définie sur $[0,1]$.

★ $X\mapsto\sqrt{X}$ est dérivable (seulement) sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $x\in[0,1], x-x^2=0 \iff x=0$ ou $x=1$.

Ainsi, pour tout $x\in]0,1[, x-x^2\in]0,1[$.

Arcsin est dérivable (seulement) sur $]-1,1[$.

Soit $x\in]0,1[$, on ne peut pas avoir $2\sqrt{x-x^2}=-1$. On résout alors :

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x-x^2}=1 &\iff 4(x-x^2)=1 \qquad \text{car les nombres } 2\sqrt{x-x^2} \text{ et 1 sont positifs}\\ &\iff (2x-1)^2=0 \qquad \text{en reprenant le calcul précédent}\\ &\iff x=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x\in]0,1[\setminus\{\frac{1}{2}\}, 2\sqrt{x-x^2}\in]-1,1[$.

Finalement, f est dérivable (au moins) sur $D=]0,1[\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ comme composée de fonctions dérivables (sur leurs ensembles respectifs de dérivabilité).

$\forall x\in D$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\times\frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}\frac{1}{\sqrt{1-(2\sqrt{x-x^2})^2}}\\ &= 2\times\frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}\frac{1}{\sqrt{1-4x+4x^2}}\\ &= \frac{1-2x}{\sqrt{x-x^2}}\frac{1}{\sqrt{(2x-1)^2}}\\ &= \frac{1-2x}{\sqrt{x-x^2}|2x-1|}\end{aligned}$$

Donc $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}} & \text{si } x\in\left]0,\dfrac{1}{2}\right[\\ -\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}} & \text{si } x\in\left]\dfrac{1}{2},1\right[\end{cases}$.

4°) $f : x \mapsto \dfrac{e^x+1}{e^x+e^{-x}}$ est définie et continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$ donc, par le théorème fondamental de l'analyse, $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{e^t+1}{e^t+e^{-t}}\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur $\mathbb{R}$ s'annulant en 0.

$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{e^t+1}{e^{2t}+1}e^t\;dt.$

On pose $u = e^t$. $t \mapsto e^t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

On note $\mathrm{d}u = e^t\,\mathrm{d}t$.

Si $t = 0$ alors $u = 1$

Si $t = x$ alors $u = e^x$.

Alors, par le théorème du changement de variables,

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_1^{e^x} \frac{u+1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_1^{e^x} \frac{u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u + \int_1^{e^x} \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln(|u^2+1|)\right]_1^{e^x} + \left[\mathrm{Arctan}(u)\right]_1^{e^x} \\
&= \frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) + \mathrm{Arctan}(e^x) - \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Ainsi, les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions : $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) + \mathrm{Arctan}(e^x) + c$ où $c \in \mathbb{R}$.

5°) a)

$$\begin{aligned}
f(x) &\underset{x\to 0}{=} \ln(1+x) \times \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \ln(1+x)\times(1+x)^{-\frac{1}{2}} \\
&\underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) \times \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} x + x^2\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + x^3\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8}\right) + o(x^3) \\
&\underset{x\to 0}{=} x - x^2 + \frac{23}{24}x^3 + o(x^3)
\end{aligned}$$

b) $f(x) \underset{x\to 0}{=} \exp(1 - x + x^2 + o(x^2)) \underset{x\to 0}{=} \exp(1)\times\exp(-x+x^2+o(x^2))$.

On pose $X \underset{x\to 0}{=} -x + x^2 + o(x^2)$. $X \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et $X \underset{x\to 0}{\sim} -x$ donc un $o(X^2)$ est un $o(x^2)$.

$\exp(X) \underset{X\to 0}{=} 1 + X + \dfrac{X^2}{2} + o(X^2)$

$$\begin{aligned}
f(x) &\underset{x\to 0}{=} e\left(1 + (-x + x^2 + o(x^2)) + \frac{1}{2}\left(-x + x^2 + o(x^2)\right)^2 + o(x^2)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} e\left(1 - x + x^2\left(1 + \frac{1}{2}\right) + o(x^2)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} e - ex + \frac{3}{2}ex^2 + o(x^2)
\end{aligned}$$

c) • D'une part :

$$\begin{aligned}
\sqrt{3+e^{4x}} &\underset{x\to 0}{=} \sqrt{3 + 1 + 4x + \frac{(4x)^2}{2} + o(x^2)} \qquad \text{car } 4x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \\
&\underset{x\to 0}{=} \sqrt{4 + 4x + 8x^2 + o(x^2)} \\
&\underset{x\to 0}{=} 2\sqrt{1 + x + 2x^2 + o(x^2)}
\end{aligned}$$

Posons $u = x + 2x^2 + o(x^2)$. On a $u \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et $u \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc un $o(u^2)$ est un $o(x^2)$.

Comme $\sqrt{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1+\frac{1}{2}u-\frac{1}{8}u^2+o(u^2)$:

$$\begin{aligned}\sqrt{3+e^{4x}} &\underset{x\to 0}{=} 2\left(1+\frac{1}{2}\left(x+2x^2+o(x^2)\right)-\frac{1}{8}\left(x+2x^2+o(x^2)\right)^2+o(x^2)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} 2\left(1+\frac{1}{2}x+x^2-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} 2+x+\frac{7}{4}x^2+o(x^2)\end{aligned}$$

- D'autre part :

$$\frac{1}{\cos x+\sin x} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)+x+o(x^2)} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1+x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}$$

Posons $u=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$. On a $u \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et $u \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc un $o(u^2)$ est un $o(x^2)$.
Comme $\frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1-u+u^2+o(u^2)$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos x+\sin x} &\underset{x\to 0}{=} 1-\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)+\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)^2+o(x^2)\\ &\underset{x\to 0}{=} 1-x+x^2\left(\frac{1}{2}+1\right)+x^2+o(x^2) \underset{x\to 0}{=} 1-x+\frac{3}{2}x^2+o(x^2)\end{aligned}$$

- Ainsi :

$$\begin{aligned}f(x) &\underset{x\to 0}{=} \left(2+x+\frac{7}{4}x^2+o(x^2)\right)\left(1-x+\frac{3x^2}{2}+o(x^2)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} 2+x(1-2)+x^2\left(\frac{7}{4}-1+3\right)+o(x^2)\end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} 2-x+\frac{15}{4}x^2+o(x^2)}$$

d) On développe le numérateur à l'ordre 3 en 0 et le dénominateur à l'ordre 2 en 0.
$\text{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)$
On note $g(x)=x\sin(x)+\exp(\sqrt{1+x}-1)$.
$\exp(\sqrt{1+x}-1) \underset{x\to 0}{=} \exp\left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)-1\right) \underset{x\to 0}{=} \exp\left(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)\right)$.
On pose $X \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)$. $X \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. $X \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2}$ donc un $o(X^2)$ est un $o(x^2)$.
$\exp(X) \underset{X\to 0}{=} 1+X+\frac{X^2}{2}+o(X^2)$
donc $\exp(\sqrt{1+x}-1) \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)\right)^2+o(x^2)$.
Ainsi, $\exp(\sqrt{1+x}-1) \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x}{2}+x^2\left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+o(x^2) \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x}{2}+o(x^2)$.
Finalement, puisque $x\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x^2+o(x^2)$, $g(x) \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x}{2}+x^2+o(x^2)$.
$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{1+\frac{x}{2}+x^2+o(x^2)}$.
On pose $X \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{2}+x^2+o(x^2)$. $X \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. $X \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2}$. un $o(X^2)$ est un $o(x^2)$.
$\frac{1}{1+X} \underset{X\to 0}{=} 1-X+X^2+o(X^2)$.
D'où $\frac{1}{g(x)} \underset{x\to 0}{=} 1-\left(\frac{x}{2}+x^2+o(x^2)\right)+\left(\frac{x}{2}+x^2+o(x^2)\right)^2+o(x^2)$.
Puis $\frac{1}{g(x)} \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x}{2}+x^2\left(-1+\frac{1}{4}\right)+o(x^2) \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x}{2}-\frac{3}{4}x^2+o(x^2)$.

Enfin, $f(x) \underset{x\to 0}{=} \left(x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)\right) \times \left(1 - \dfrac{x}{2} - \dfrac{3}{4}x^2 + o(x^2)\right)$.

$f(x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + x^3\left(-\dfrac{1}{3} - \dfrac{3}{4}\right) + o(x^3)$.

Finalement, $\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{13}{12}x^3 + o(x^3)}$.

6°) f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{Im}(e^{x\sqrt{3}}e^{ix}) = \operatorname{Im}(\underbrace{e^{x(\sqrt{3}+i)}}_{g(x)})$.

g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

On conjecture (se prouve par récurrence) que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, g^{(n)}(x) = (\sqrt{3}+i)^n e^{x(\sqrt{3}+i)}$.

Pour tous $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = \operatorname{Im}(g^{(n)}(x))$.

$g^{(n)}(x) = (2e^{i\frac{\pi}{6}})^n e^{x\sqrt{3}}e^{ix} = 2^n e^{i\frac{n\pi}{6}} e^{x\sqrt{3}}e^{ix} = 2^n e^{x\sqrt{3}} e^{i(\frac{n\pi}{6}+x)}$.

Ainsi, $f^{(n)}(x) = 2^n e^{x\sqrt{3}} \sin\left(\dfrac{n\pi}{6} + x\right)$.

7°) Au voisinage de 5, $\dfrac{x^x - 5^5}{x-5} = \dfrac{e^{x\ln x} - e^{5\ln 5}}{x-5}$.

On reconnaît le taux d'accroissement en 5 de la fonction $f : x \mapsto e^{x\ln x}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0, f'(x) = (\ln x + 1)e^{x\ln x}$.

f est dérivable en 5 et $f'(5) = (\ln 5 + 1)5^5$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^x - 5^5}{x-5} = (\ln 5 + 1)5^5$.

8°) On note $B = A^2$.

Soit $(i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2$.

$$\begin{aligned} b_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{i}{k}\frac{k}{j} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{i}{j} \\ &= n\frac{i}{j} \\ &= na_{i,j} \end{aligned}$$

Ainsi, $A^2 = nA$.

9°) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

★ Si $X = 0$ alors $X^TX = 0$.

★ Réciproquement, on suppose $X^TX = 0$.

On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

$X^TX = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

Ainsi, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$. Comme tous les termes de la somme sont positifs, on en déduit que : $\forall i \in \{1, \ldots, n\}, x_i = 0$.

Ainsi, $X = 0$.

On a bien montré que : $X^TX = 0 \iff X = 0$.

1 Un exo du TD12

On pose : $f(x) = \text{Arctan}\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$.

1°) Arctan est définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$\begin{aligned} f(x) \text{ existe} &\iff \frac{1-x}{1+x} \geq 0 \\ &\iff (1-x)(1+x) \geq 0 \qquad \text{car le signe de } \frac{a}{b} \text{ est le signe de } a \times b \\ &\iff x \in [-1, 1] \\ &\qquad \text{car } (1-x)(1+x) \text{ est un trinôme de racines } -1 \text{ et } 1 \text{ et de coeff dominant -1<0} \end{aligned}$$

Ainsi, f est définie sur $]-1, 1]$.

2°) f est continue sur $]-1, 1]$ comme quotient et composée de fonctions continues.

$\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} \underset{x \to (-1)^+}{\longrightarrow} +\infty$ et $\text{Arctan}(X) \underset{X \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}$ donc, par composition $f(x) \underset{x \to (-1)^+}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{2}$.

Ainsi, f est prolongeable par continuité en -1 en posant $f(-1) = \dfrac{\pi}{2}$.

3°) Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$. $x \mapsto \dfrac{1-x}{1+x}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$X \mapsto \sqrt{X}$ est dérivable seulement sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus, pour tout $x \in]-1, 1]$, $\dfrac{1-x}{1+x} = 0 \iff x = 1$.

Donc, f est dérivable au moins sur $]-1, 1[$ comme composée et quotient de fonctions dérivables.

$\forall x \in]-1, 1[$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{-(1+x) - (1-x)}{(1+x)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \times \frac{1}{1 + \frac{1-x}{1+x}} \\ &= -\frac{1}{(1+x)^2} \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} \times \frac{1+x}{2} \\ &= -\frac{1}{2(1+x)} \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in]-1, 1[$, $f'(x) = \left(\dfrac{1}{2}\text{Arccos}\right)'(x)$.

Comme $]-1, 1[$ est un intervalle, on en déduit : $\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in]-1, 1[, f(x) = \dfrac{1}{2}\text{Arccos}(x) + c$.

En posant $x = 0$: $f(0) = \dfrac{1}{2}\text{Arccos}(0) + c$. Or $f(0) = \text{Arctan}(1) = \dfrac{\pi}{4}$ et $\text{Arccos}(0) = \dfrac{\pi}{2}$ donc $c = 0$.

Ainsi, pour tout $x \in]-1, 1[$, $f(x) = \dfrac{1}{2}\text{Arccos}(x)$.

Comme les fonctions f et Arccos sont continues en -1 et 1, on en déduit que l'égalité est aussi valable en -1 et 1.

Finalement, pour tout $x \in [-1, 1]$, $f(x) = \dfrac{1}{2}\text{Arccos}(x)$.

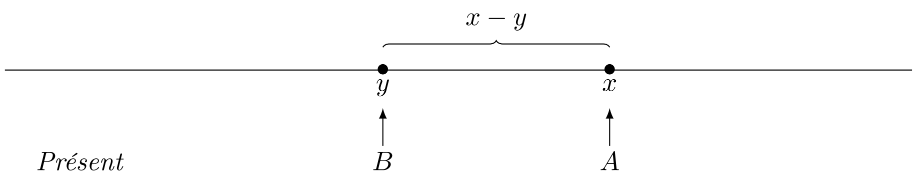
Pour s'amuser

On note A la personne qui s'adresse à l'autre personne, notée B.

Il y a 3 temps dans l'énoncé : passé, présent, futur.

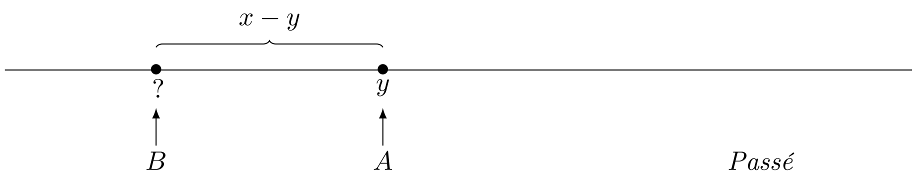
On note x l'âge actuel (donc au présent) de A et y l'âge actuel de B.

★ On a $x > y$. Visualisons les âges sur un axe. La différence d'âge est égal à $x - y$.



★ La personne A a deux fois l'âge que B avait quand A avait l'âge que B a actuellement.

Ce passé a eu lieu il y a $x - y$ années.



À cette époque, B avait $y - (x - y) = 2y - x$ années.

Ainsi, $x = 2(2y - x)$ soit $3x = 4y$.

★ Quand B aura l'âge de A, A et B auront ensemble 108 ans. Cela se passera dans $x - y$ années.

A aura $x + x - y = 2x - y$ années et B aura x années.

Donc, $3x - y = 108$.

Ainsi, puisque $3x = 4y$, on a : $3y = 108$ ie $y = 36$ puis $x = \dfrac{4 \times 36}{3} = 48$.

$\boxed{\text{L'âge d'Eulalie est égal à } x + y = 84.}$

Une récurrence qui conduit à un résultat étrange

En fait, ce qui pose problème, c'est l'hérédité pour passer de P_1 à P_2.

- Si $n \geq 2$, $P_n \implies P_{n+1}$ est vrai.

  Pour bien comprendre, prenons un exemple : pour $n = 2$, on suppose que P_2 est vraie.

  On se donne alors $G = \{e_1, e_2, e_3\}$ un groupe de 3 élèves où e_1 est une fille.

  On forme $G_1 = \{e_1, e_2\}$ et $G_2 = \{e_1, e_3\}$ (ici $n - 1 = 1$ et $n + 1 = 3$).

  On peut alors utiliser le fait que P_2 est vraie et en déduire, puisque e_1 est une fille, que les éléments de G_1 et G_2 sont des filles et donc les 3 élèves sont des filles.
- En revanche $P_1 \implies P_2$ est faux.

  En effet, pour $n = 1$, on suppose P_1 vraie. On se donne alors un groupe de 2 élèves $G = \{e_1, e_2\}$ où e_1 est une fille.

  $G_1 = \{e_1\}$ et G_2 n'a pas de sens comme indiqué dans l'énoncé car $e_{n-1} = e_0$ n'existe pas.

  On ne peut absolument pas en déduire que P_2 est vraie.

Un exercice difficile

La forme $\dfrac{x - y}{1 + xy}$ *doit conduire à penser à la formule* $\tan(a - b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$.

On ordonne les 3 nombres et on les numérote : $0 \leq x_1 < x_2 < x_3$.

tan réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}_+$ (appliquez le théorème de la bijection).
Donc, $\forall i \in \{1,2,3\}, \exists! \theta_i \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, x_i = \tan(\theta_i)$.
Comme tan est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a : $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \frac{\pi}{2}$.
Soit i et j deux indices entre 1 et 3 tels que $i < j$.

$$\frac{x_j - x_i}{1 + x_i x_j} = \frac{\tan(\theta_j) - \tan(\theta_i)}{1 + \tan(\theta_i)\tan(\theta_j)} = \tan(\theta_j - \theta_i)$$

On sait déjà $x_j - x_i > 0$.

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{x_j - x_i}{1 + x_i x_j} < 1}_{\text{noté}(*)} &\iff \tan(\theta_j - \theta_i) < 1 \\ &\iff \tan(\theta_j - \theta_i) < \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

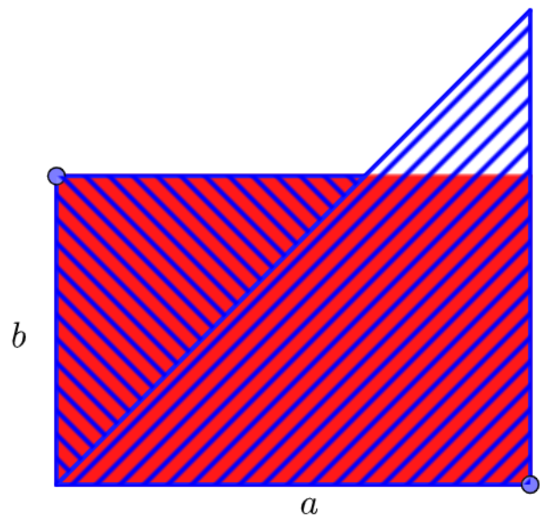
On sait que $0 < \theta_i < \theta_j < \frac{\pi}{2}$ donc $0 < \theta_j - \theta_i < \frac{\pi}{2}$ puisque $\theta_j - \theta_i$ est la distance entre θ_i et θ_j.
De plus $\frac{\pi}{4} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et tan est strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ donc

$$(*) \iff \theta_j - \theta_i < \frac{\pi}{4}$$

Travaillons avec deux indices consécutifs pour maximiser nos chances i.e. cherchons au moins un i tel que $\theta_{i+1} - \theta_i \leq \frac{\pi}{4}$.

Supposons par l'absurde que : $\begin{cases} \theta_2 - \theta_1 \geq \frac{\pi}{4} \\ \theta_3 - \theta_2 \geq \frac{\pi}{4} \end{cases}$. Alors, en sommant membre à membre : $\theta_3 - \theta_1 \geq \frac{\pi}{2}$.
Ceci est exclu car θ_1 et θ_3 sont tous les 2 dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Nécessairement $\theta_3 - \theta_1 < \frac{\pi}{2}$.
Ainsi, il y au moins un $i \in \{1, 2\}$ tel que $\theta_{i+1} - \theta_i < \frac{\pi}{4}$.
Finalement, $0 < \theta_{i+1} - \theta_i < \frac{\pi}{4}$. Donc $0 < \frac{x_{i+1} - x_i}{1 + x_i x_{i+1}} < 1$.

Une preuve sans parole



On distingue un rectangle dont les côtés mesurent a et b.
On distingue aussi deux triangles rectangles isocèles : T_1 dont les côtés, hors hypothénuse, ont pour longueur a et T_2 dont les côtés, hors hypothénuse, ont pour longueur b.

La figure suggère que l'aire du rectangle est inférieure à la somme des aires des deux triangles.
Or le rectangle a pour aire : ab.
T_1 a pour aire : $\dfrac{a \times a}{2} = \dfrac{a^2}{2}$ (cf. formule $\dfrac{b \times h}{2}$ où b : base et h : hauteur).
T_2 a pour aire : $\dfrac{b^2}{2}$.
La figure illustre l'inégalité : $ab \leq \dfrac{a^2+b^2}{2}$.

Inégalité facile à démontrer :
Soit a et b deux réels positifs :

$$\begin{aligned} ab \leq \frac{a^2+b^2}{2} &\iff 2ab \leq a^2+b^2 \qquad \text{car } 2>0 \\ &\iff a^2+b^2-2ab \geq 0 \\ &\iff \underbrace{(a-b)^2 \geq 0}_{vrai!} \end{aligned}$$

Ainsi, $ab \leq \dfrac{a^2+b^2}{2}$.
Inégalité appelée parfois *inégalité de l'identité remarquable* (vu la preuve).