



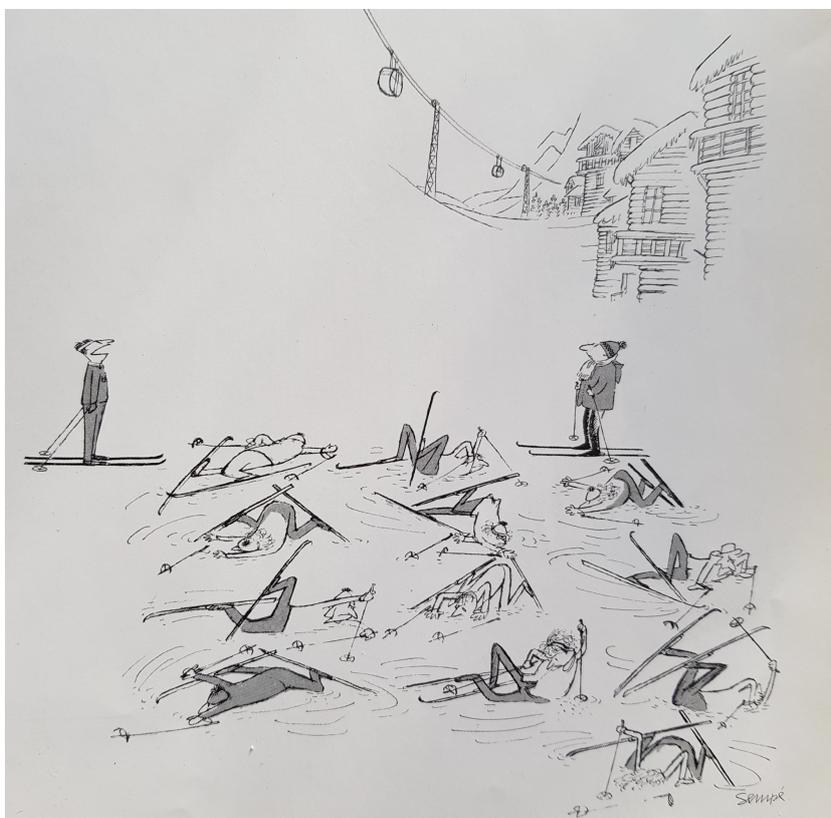
## Le monde étrange d'Escher

M. C. Escher (1898 - 1972) est un artiste néerlandais, connu pour ses gravures sur bois et lithographies souvent inspirées des mathématiques. L'œuvre *Chute d'eau* (en néerlandais : *Waterval*) est une lithographie imprimée pour la première fois en octobre 1961. Elle représente une machine à mouvement perpétuel où un cours d'eau part de la base d'une chute d'eau en semblant descendre avant d'atteindre le sommet de cette chute, créant ainsi un paradoxe visuel. Le cours d'eau en aqueduc alimentant la chute d'eau a la structure de deux triangles de Penrose.



## Plan du cahier de vacances

1 DS5	3
2 Travailler les chapitres d'algèbre	3
3 A revoir	3
4 DM 8	3
5 Un exercice du TD11 non corrigé en cours : pour travailler le raisonnement	3
6 Calculs en autonomie	3
7 Un exo du TD12 non corrigé en cours : pour travailler la dérivation	4
8 Pour s'amuser	4
9 Une récurrence qui conduit à un résultat étrange	4
10 Un exercice difficile	5
11 Une preuve sans parole	5
12 Culture : coup de projecteur sur une femme scientifique, Sophie Germain	5



*Et pourquoi n'avez-vous pas exécuté le mouvement, Monsieur Martin ?*

## 1 DS5

Reprendre le DS5, comprendre vos erreurs et refaire certaines questions non réussies.

## 2 Travailler les chapitres d'algèbre

Revoir le calcul matriciel et le chapitre *Espaces vectoriels*. C'est un chapitre abstrait, difficile, qui demande que l'on y passe du temps. Le DS6 portera entièrement sur l'algèbre.

## 3 A revoir

- Règles sur les puissances (avec  $x^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ), propriétés de  $\ln$ ,  $\exp$ .
- Limites classiques : croissances comparées (avec  $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$ ), limites usuelles issues des taux d'accroissement (cf. fiche *Conseils sur les limites*, disponible sur le site de classe).
- Formulaire trigo et s'entraîner à retrouver des formules.
- Dérivées usuelles et primitives.
- Sommes à apprendre par cœur (sans oublier la formule du binôme), la factorisation  $a^n - b^n$ .
- DL usuels à un petit ordre.
- Méthodes pour démontrer des inégalités (ch1 + EAF).
- Relire tout ou partie des fiches bilans.

## 4 DM 8

À ne pas faire au dernier moment, se laisser du temps en cas de blocage.  
Vous pouvez me poser des questions par mail si besoin.

Le corrigé des questions suivantes est disponible sur le site de la classe, rubrique `Cahier_de_vacances`.

## 5 Un exercice du TD11 non corrigé en cours : pour travailler le raisonnement

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ , à valeurs dans  $I$ .  
On suppose que  $f \circ f$  admet un point fixe. Montrer que  $f$  admet aussi un point fixe.

## 6 Calculs en autonomie

*Vous pouvez refaire (ou faire...) certains calculs en autonomie des fiches de révision précédentes. Vous avez aussi les fiches d'AP du début d'année. Tout est sur le site de classe.*

1°) Comparer, sans calculatrice,  $\pi^3$  et  $3^\pi$ .

2°) Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable en 0. Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x}$ .

3°) Soit  $f : x \mapsto \text{Arcsin}(2\sqrt{x - x^2})$ . Domaine de définition, dérivabilité et dérivée.

*On se contentera d'une dérivabilité « au moins ». On n'étudiera pas la dérivabilité aux points posant problème.*

4°) Déterminer les primitives de  $x \mapsto \frac{e^x + 1}{e^x + e^{-x}}$ .

5°) Donner le  $DL_n(0)$  de  $f$  :

a)  $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x}}$  pour  $n = 3$

b)  $f(x) = \exp\left(\frac{1}{x+1}\right)$  pour  $n = 2$

c)  $f : x \mapsto \frac{\sqrt{3+e^{4x}}}{\cos x + \sin x}$  pour  $n = 2$

d)  $f : x \mapsto \frac{\text{Arctan}(x)}{x \sin(x) + \exp(\sqrt{1+x}-1)}$  pour  $n = 3$

6°) Dérivée  $n^{\text{ème}}$  de  $f : x \mapsto e^{x\sqrt{3}} \sin(x)$ .

7°) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^x - 5^5}{x - 5}$ .

8°) Soit  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que :  $\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2, a_{i,j} = \frac{i}{j}$ .

Calculer  $A^2$  en utilisant la formule générale du produit.

9°) Soit  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . Montrer que  $X^T X = 0 \iff X = 0$ .

## 7 Un exo du TD12 non corrigé en cours : pour travailler la dérivation

On pose :  $f(x) = \text{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$ .

1°) Donner le domaine de définition de  $f$ .

2°) Étudier la continuité de  $f$ . Peut-on prolonger  $f$  par continuité ?

3°) Simplifier l'expression de  $f$ .

## 8 Pour s'amuser

J'ai deux fois l'âge que tu avais quand j'avais l'âge que tu as. Quand tu auras mon âge, nous aurons ensemble 108 ans. Mais aujourd'hui, nous n'avons ensemble que l'âge de Tante Eulalie.

Quel est, aujourd'hui, l'âge de Tante Eulalie ?

## 9 Une récurrence qui conduit à un résultat étrange

Soit, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , la proposition  $P_n$  : "dans tout ensemble de  $n$  élèves du lycée La Martinière qui comporte au moins une fille, il n'y a que des filles".

\*  $P_1$  est évidemment vérifiée.

\* Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  fixé. Supposons que  $P_n$  est vraie.

Prenons un groupe de  $n+1$  élèves du lycée qui comporte au moins une fille.

Notons  $G = \{e_1, e_2, \dots, e_n, e_{n+1}\}$  ce groupe où  $e_1$  est une fille.

Ainsi, le groupe  $G_1 = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  est un groupe à  $n$  élèves qui comporte une fille donc, d'après  $P(n)$ , il n'y a que des filles :  $e_1, e_2, \dots, e_n$  sont des filles.

Considérons alors le groupe  $G_2 = \{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, e_{n+1}\}$  lui aussi comporte  $n$  élèves et au moins une fille  $e_1$  donc, toujours d'après  $P(n)$ ,  $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, e_{n+1}$  sont des filles.

Finalement,  $e_1, e_2, \dots, e_n, e_{n+1}$  sont des filles donc  $P_{n+1}$  est vraie.

\* Conclusion : on a prouvé par récurrence que  $P_n$  est vraie pour tout entier  $n \geq 1$ .

\* Ainsi, en PTS1, il n'y a que des filles.

Qu'en pensez-vous ?

## 10 Un exercice difficile

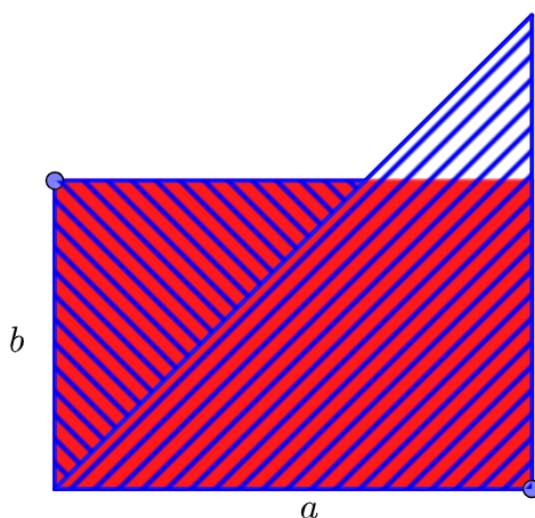
Parmi 3 réels distincts positifs ou nuls, montrer que l'on peut toujours en trouver au moins deux  $x$  et  $y$  tels que

$$0 < \frac{x - y}{1 + xy} < 1$$

## 11 Une preuve sans parole

La figure suivante suggère une inégalité. Laquelle ?

La démontrer ensuite par le calcul.



## 12 Culture : coup de projecteur sur une femme scientifique, Sophie Germain

*Il est vrai qu'on parle peu des femmes scientifiques. Comme s'il n'y en avait pas eu. Pendant des siècles, les femmes n'ont pas eu accès aux études, les universités leur étaient interdites. Pourtant, certaines femmes sont arrivées à transgresser leur condition et ont pu mener à bien des travaux qui sont passés à la postérité. Mais souvent, elles se sont fait d'abord passer pour des hommes pour arriver à leurs fins.*

LE TEXTE SUIVANT EST UN ARTICLE DE JULIEN REBUCCI PARU DANS *Le Point* LE 28/12/23.

Elle a été la première mathématicienne à étudier à Polytechnique, dès 1794. Pourtant, l'école était réservée aux hommes jusqu'en 1972...

Jusqu'où peuvent mener la volonté et l'entêtement d'une chercheuse à étudier, malgré les affres d'une époque où l'accès aux mathématiques était réservé aux hommes ? Prenez le cas de Sophie Germain. Elle est née le 1er avril 1776 à Paris, dans une famille bourgeoise et cultivée.

Elle a deux autres sœurs qui ont réalisé de beaux mariages pour le plus grand plaisir de leur père, Ambroise-François Germain, un commerçant en tissus, qui va devenir député du Tiers État à l'Assemblée constituante. Sophie, la cadette, est une enfant de son époque, celle de la Révolution française de 1789.

Elle découvre les mathématiques dans la bibliothèque familiale. Elle dévore le Cours de mathématiques à l'usage des gardes du pavillon de la marine, d'Étienne Bézout, et l'Histoire des mathématiques,

de Jean-Étienne Montucla. Malgré la désapprobation paternelle comme le relate l'ouvrage OEuvres philosophiques de Sophie Germain, suivies de pensées et de lettres inédites et précédées d'une étude sur sa vie et ses oeuvres, d'Hippolyte Stupuy : « Pour la forcer à prendre le repos nécessaire [la nuit], on retire de sa chambre le feu, les vêtements, la lumière. [Sophie] feint de se résigner ; mais, quand la famille est endormie, elle se relève, s'enveloppe de couvertures et, par un froid tel que l'encre gèle en son écritoire, se livre à ses chères études. Plusieurs fois, on la surprit ainsi le matin, transie de froid sans s'en être aperçue. Devant une volonté si extraordinaire pour son âge, on eut la sagesse de laisser la jeune Sophie disposer à son gré de son temps et de son génie, et l'on fit bien. »

#### *Un alias en forme de sésame*

Sophie Germain se forme donc aux mathématiques, seule, en autodidacte. Elle fête son dix-huitième anniversaire en 1794, cette même année où est fondée la prestigieuse école Polytechnique à Paris. Mais les bancs de cet établissement sont réservés aux hommes - ils le seront jusqu'en 1972. Pas de quoi effrayer la jeune femme, qui va tout faire pour suivre l'enseignement délivré.

Sur cet épisode, les versions divergent mais, d'après Anne Boyé, chercheuse associée en histoire des mathématiques au Centre François-Viète, dans un article pour le CNRS : « Sophie Germain aurait appris qu'un élève appelé Augustin Leblanc avait cessé d'assister aux cours. Elle s'est donc fait passer pour lui, par courrier, afin de récupérer les photocopiés de mathématiques. »

Pour le monde des maths, Sophie Germain s'appellera donc Augustin Leblanc. Cet alias en forme de sésame permet à la jeune femme de correspondre de façon épistolaire avec d'autres chercheurs pour confronter ses recherches et de continuer d'étancher sa soif de connaissance.

#### *Ses sœurs l'aident financièrement*

Chaque semaine, elle rend ses devoirs par courrier au responsable des cours d'analyse mathématique, l'illustre Joseph-Louis Lagrange, l'un des pères du système métrique. Face à la qualité du travail rendu, ce dernier demande à rencontrer cet Augustin Leblanc. Lorsqu'il découvrit enfin le pot aux roses, Lagrange devint « son soutien », précisent Antigoni Alexandrou et Claudine Hermann dans Sophie Germain : une polytechnicienne avant l'heure, publié dans La jaune et la rouge, la revue de l'école.

Lagrange la libère d'un carcan. Sa famille s'occupe du reste : son père renonce à la marier et ses sœurs l'aident financièrement. Dès lors, à partir de la fin du XVIIIe siècle, Sophie Germain ne se contente plus de rendre ses devoirs, elle se met à étudier les (vastes) champs inexplorés des mathématiques, et en particulier de la théorie des nombres d'Adrien-Marie Legendre, avec qui elle débute là aussi une relation épistolaire.

Ce dernier la dirige ensuite vers le mathématicien allemand Carl Friedrich Gauss, avec qui elle entame une nouvelle relation épistolaire - sous son pseudonyme de Leblanc - autour de la résolution du mythique Grand théorème de Fermat.

#### *Un théorème qui porte son nom*

Parfois, la petite et la grande histoire se rejoignent et s'entrechoquent. En 1806, Napoléon entreprend la campagne de Prusse et de Pologne. Il se dirige vers Brunswick, où réside Gauss. Sophie Germain craint pour la vie de son confrère devenu ami. Elle supplie alors l'une de ses connaissances, le général Pernety, de l'épargner. Gauss découvre, lors de cet épisode, la véritable identité de ce Leblanc, avec qui il conversait depuis trois ans.

Le 30 avril 1807, il lui écrit : « Comment vous décrire mon admiration et mon étonnement, en voyant se métamorphoser mon correspondant estimé M. Leblanc en cet illustre personnage [...] Le goût pour les sciences abstraites en général et surtout pour les mystères des nombres est fort rare [...], les charmes enchanteurs de cette sublime science ne se décèlent dans toute leur beauté qu'à ceux qui ont le courage de l'approfondir. Mais lorsqu'une personne de ce sexe, qui, par nos moeurs et par nos préjugés, doit rencontrer infiniment plus d'obstacles et de difficultés, que les hommes, à se familiariser avec ces

recherches épineuses, sait néanmoins franchir ces entraves et pénétrer ce qu'elles ont de plus caché, il faut sans doute qu'elle ait le plus noble courage, des talents tout à fait extraordinaires, le génie supérieur. »

La contribution de Sophie Germain à la démonstration du Grand théorème de Fermat se solde par le théorème de Sophie Germain - un cas particulier de l'énoncé de Fermat - et aux nombres premiers de Sophie Germain - soit un nombre premier dont le double plus un est aussi premier. Mais elle ne publiera jamais le théorème qui porte son nom, c'est Adrien-Marie Legendre qui le fera plus tard, comme le rappellent Clara Grima, Alberto Marquez et Magali Mangin dans Germain : une pionnière de la théorie des nombres (Rba Génies Des Mathématiques, janvier 2018).

Théorème de Sophie Germain :

Soit  $p$  un nombre premier de Sophie Germain (i.e.  $p$  est premier et  $2p + 1$  est aussi premier).

Si des entiers naturels  $x, y, z$  vérifient l'équation  $x^p + y^p = z^p$  alors au moins l'un des trois est divisible par  $p^2$ .

*Inhumée dans une relative indifférence*

En 1809, l'Académie des sciences lance un concours : l'analyse des figures de Chladni, du nom du physicien et mathématicien allemand. Avec l'archet de son violon, il frotte le bord d'une plaque de cuivre recouverte de sable fin. La plaque vibre et le sable dessine des figures géométriques qui impressionnent Napoléon, témoin du spectacle. De nombreux mathématiciens s'y attellent... Dont Sophie Germain qui, après trois mémoires présentés, remporte le concours !

Le 8 janvier 1816, l'Académie des sciences organise une cérémonie pour lui remettre son prix. Enfin, Sophie Germain sera Sophie Germain, à part entière. Elle n'aura plus à se cacher derrière un pseudonyme. Mais la jeune femme ne s'y rend pas d'après Le Journal des Débats de l'époque, cité dans l'ouvrage d'Hippolyte Stupuy, sans que l'on sache véritablement pourquoi.

Sophie Germain poursuit sa vie de mathématiciennes jusqu'à ses derniers jours. Un cancer du sein lui est diagnostiqué en 1829. Elle meurt deux ans plus tard, le 27 juin 1831, à son domicile parisien. Elle est inhumée au cimetière du Père-Lachaise (dans la 16e division) dans une relative indifférence : « L'acte de décès, signé de MM. Arnaud-Jacques Lherbette, neveu de la défunte, Marc-Pierre Gaigne, ami, et Démonts, adjoint au maire du onzième arrondissement, la qualifie de rentière », peut-on lire dans le livre de Stupuy.

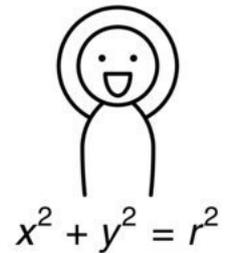
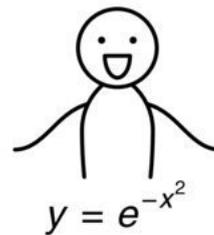
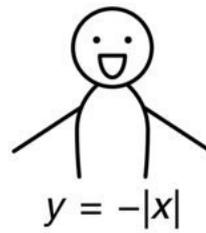
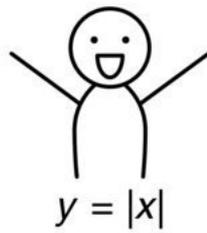
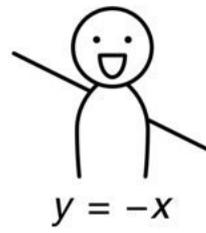
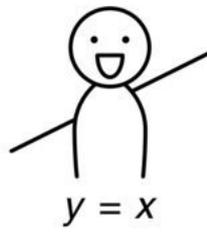
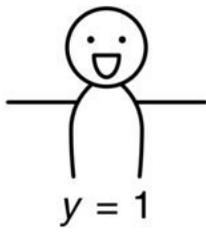
La reconnaissance de cette pionnière arrivera bien plus tard : le prix Sophie-Germain de Mathématiques a été créé en 2003. Remis chaque année par la Fondation Sophie-Germain sur proposition de l'Académie des Sciences, il est destiné à couronner un chercheur ayant effectué un travail de recherche fondamentale en mathématiques. Le 18 mars 2016, La Poste française émet un timbre à son effigie à l'occasion du 200e anniversaire du prix décerné par l'Académie des Sciences. Enfin, une rue porte son nom à Orsay, au coeur du plateau de Saclay, depuis 2021.

*En 2016, une pionnière enfin reconnue*



*L'allée qui mène à l'esplanade de l'École Polytechnique porte le nom de Sophie Germain.*

# Dancing Mathematician



Bonne