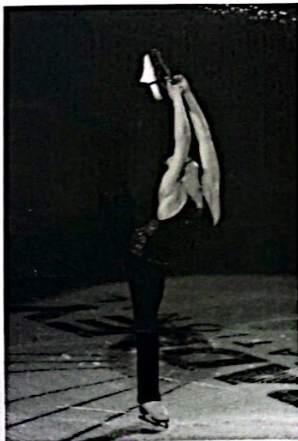


Mécanique MC5 Loi du moment cinétique.
Mouvement d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

Produit scalaire 1
 Produit vectoriel 1
 I Moment d'une force 2
 1.) Point matériel 2
 2.) Système de points matériels $S = \{M_i (m_i)\}$ 4
 II Moment cinétique 5
 1.) Définition 5
 2.) Théorème du moment cinétique 6
 3.) Solide en rotation autour d'un axe fixe $\Delta = (Oz)$ 8
 III Approche énergétique des solides 10
 1.) Théorèmes généraux 10
 2.) Energies 10
 3.) Puissance des actions sur un solide 11
 IV Script python : Pendule pesant. Non isochronisme des oscillations 11
 1.) Principe 11
 2.) Mise en oeuvre 11
 Conclusion : Tabouret d'inertie 12

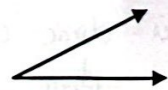


(cos)

*
*
*
*
*
*
*
*
*

Produit scalaire $w = \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \alpha$
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si \vec{u} et \vec{v} sont perpendiculaires.

Produit vectoriel $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ tel que :
 \vec{w} est perpendiculaire au plan formé par \vec{u}, \vec{v} $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est un trièdre direct.
 $\|\vec{w}\| = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot |\sin \alpha|$
 $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$ $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires



sin

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}$$

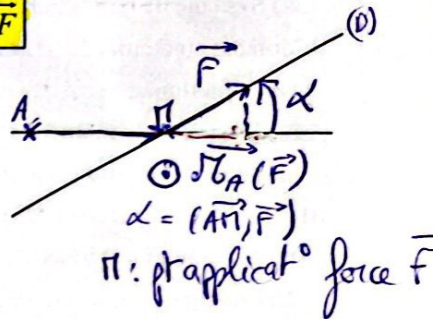
I Moment d'une force

1.) Point matériel

a) Moment au point A d'une force \vec{F} appliquée au point M :

$\vec{M}_A(\vec{F}) = \vec{AM} \wedge \vec{F}$

$(D) = (M, \vec{F})$



$\|\vec{M}_A(\vec{F})\| = \|\vec{F}\| \times \|\vec{AM}\| \times \sin \alpha$, $(\vec{AM}, \vec{F}, \vec{M}_A(\vec{F})) = \text{trèdre direct.}$

si \vec{AM} et \vec{F} colinéaires, $\alpha = 0$ donc $\vec{M}_A(\vec{F}) = \vec{0}$ ← si $A \in (D)$.

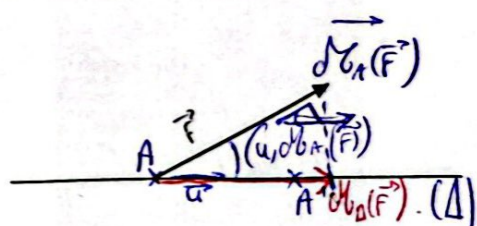
b) Moment d'une force \vec{F} appliquée au point M, par rapport à un axe Δ :

vect unitaire

Définition : Soit un axe Δ passant par A, de vecteur unitaire \vec{u} ; $M_\Delta(\vec{F}) = \vec{M}_A \cdot \vec{u} = \|\vec{M}_A\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{M}_A)$

Propriétés : M_Δ a même valeur en tout point de l'axe Δ . $\vec{M}_A \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{M}_A$

si $\vec{M}_A(\vec{F}) \perp \Delta \rightarrow M_\Delta(\vec{F}) = 0$



démo : $A, A' \in (\Delta)$

$$\begin{aligned} & \vec{M}_A \cdot \vec{u} - \vec{M}_{A'} \cdot \vec{u} \\ & (\vec{AM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u} - (\vec{A'M} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u} \\ & ((\vec{AM} \wedge \vec{F}) + \vec{MA'} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u} \\ & (\vec{AM} + \vec{MA'}) \wedge \vec{F} \cdot \vec{u} \\ & (\vec{AA'} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u} \\ & (k\vec{u} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u} \\ & \perp \vec{u} \text{ donc } \vec{M}_A \cdot \vec{u} - \vec{M}_{A'} \cdot \vec{u} = \vec{0} \\ & \text{donc } \vec{M}_A \cdot \vec{u} = \vec{M}_{A'} \cdot \vec{u} \end{aligned}$$

Propriétés : Si (D) et (Δ) sont coplanaires, alors $M_{\Delta} = 0$

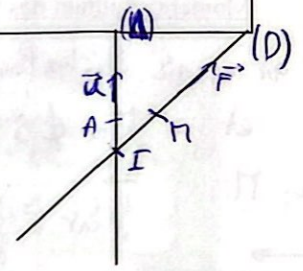
- 1) Si D (droite support de \vec{F} , passant par M), coupe Δ (passant par A, de vecteur unitaire \vec{u}) en un point I, alors $M_{\Delta} = 0$.
- 2) Si (D) // (Δ), alors $M_{\Delta} = 0$

démo 1:

$$M_{\Delta}(\vec{F}) = (\vec{AM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u}$$

on a mg M_{Δ} ne dépend pas de A choisi sur (Δ)

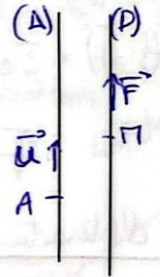
$$\Rightarrow M_{\Delta}(\vec{F}) = (\vec{IM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u} \text{ où } \vec{IM} \text{ et } \vec{F} \text{ colinéaires donc } \vec{IM} \wedge \vec{F} = \vec{0} \text{ donc } M_{\Delta}(\vec{F}) = 0$$



démo 2:

$$M_{\Delta}(\vec{F}) = (\vec{AI} \wedge k\vec{u}) \cdot \vec{u} = 0$$

donc $M_{\Delta}(\vec{F}) = 0$.



***** c) Application**

Propriété : $M_{\Delta} = \pm d.F$ où d est le bras de levier (distance à l'axe).

$$\vec{M}_A(\vec{F}) = \vec{AM} \wedge \vec{F} = \vec{AH} \wedge \vec{F} + \vec{HM} \wedge \vec{F}$$

$$= \vec{AH} \wedge \vec{F} + \vec{0}$$

$$M_{\Delta}(\vec{F}) = \vec{M}_A(\vec{F}) \cdot \vec{u}$$

$$= \vec{AH} \wedge \vec{F} \cdot \vec{u}$$

$$= d \|\vec{F}\| \vec{u} \cdot \vec{u} \text{ car } \vec{AH} \perp \vec{F} \text{ donc } \vec{AH} \wedge \vec{F} \in \vec{u}$$

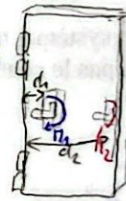
$$M_{\Delta}(\vec{F}) = d \|\vec{F}\|$$

Rq: Si \vec{u} sens inverse de schéma

$$M_{\Delta}(\vec{F}) = -d \|\vec{F}\|$$

donc pour $\vec{F} = \text{cte}$, $M_{\Delta}(\vec{F}) \propto d$

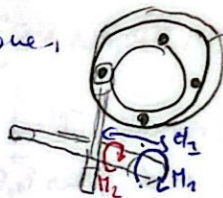
ex: porte:



$M_2 > M_1$ car $d_2 > d_1$
 ↳ faut mettre la poignée loin pour exercer moins de force

ex: roue:

changer roue



$M_1 > M_2$
 car $d_1 > d_2$
 ↳ roue → faut se mettre loin

Ces résultats s'appliquent à une force quelconque en la décomposant en une force coplanaire et une force non coplanaire à Δ : $\vec{F} = \vec{F}_{//} + \vec{F}_{\perp}$. On a alors $M_{\Delta} = \pm d.F_{\perp}$.

2.) Système de points matériels $S = \{M_i (m_i)\}$

a) Moments intérieurs et extérieurs

Moment résultant des forces intérieures au système au point A : $\vec{M}_{A,int} = \sum_i \vec{M}_A(\vec{f}_{i,int}) = \vec{0}$

Moment résultant des forces extérieures au système au point A : $\vec{M}_{A,ext} = \sum_i \vec{M}_A(\vec{f}_{i,ext})$

M_i est soumis à des forces exercées par $M_j \in S$ (force intérieure) et par $M_k \notin S$ (force ext)

Pour M_i : $\vec{f}_{i,int} = \sum_{j \neq i} \vec{f}_{j \rightarrow i}$

$\vec{M}_A(\vec{f}_{i,int}) = \vec{AM}_i \wedge \vec{f}_{i,int} = \vec{AM}_i \wedge \sum_{j \neq i} \vec{f}_{j \rightarrow i}$

car $\vec{M}_{A,int} = \sum_i \vec{M}_A(\vec{f}_{i,int}) = \sum_i \vec{AM}_i \wedge \sum_{j \neq i} \vec{f}_{j \rightarrow i}$

donc $\vec{M}_{A,int} = \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{AM}_i \wedge \vec{f}_{j \rightarrow i}$

Principe d'interaction : $\vec{f}_{j \rightarrow i} = -\vec{f}_{i \rightarrow j}$

$\vec{AM}_i \wedge \vec{f}_{j \rightarrow i} + \vec{AM}_j \wedge \vec{f}_{i \rightarrow j} = \vec{AM}_i \wedge \vec{f}_{j \rightarrow i} - \vec{AM}_j \wedge \vec{f}_{j \rightarrow i}$

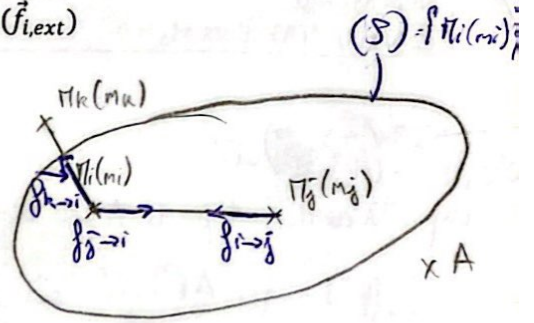
$= \vec{AM}_i \wedge \vec{f}_{j \rightarrow i} + \vec{r}_{jA} \wedge \vec{f}_{j \rightarrow i}$

$= (\vec{AM}_i + \vec{r}_{jA}) \wedge \vec{f}_{j \rightarrow i}$

$= \vec{r}_{jM_i} \wedge \vec{f}_{j \rightarrow i}$

$= \vec{0}$ car \vec{r}_{jM_i} et $\vec{f}_{j \rightarrow i}$ colinéaires

les termes s'annulent deux à deux dans $\vec{M}_{A,int}$



b) Notion de couple

Couple : Action menée sur un système, telle que la force résultante soit nulle ; Un couple ne déplace pas le centre d'inertie d'un système, mais tend à le faire tourner.

mais placées en A_1 et A_2

Resultante des forces : $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$

↳ centre d'inertie du volant O est fixe (CFO)

$\vec{M}_O = \vec{M}_O(\vec{F}_1) + \vec{M}_O(\vec{F}_2)$

$= \vec{OA}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{OA}_2 \wedge \vec{F}_2$

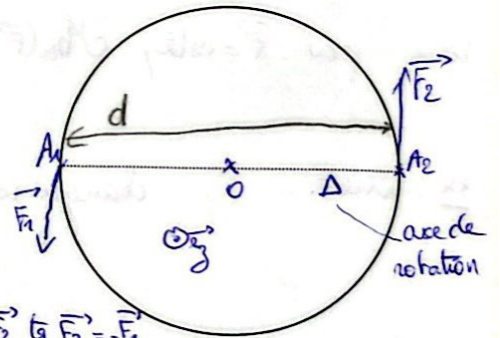
$= \vec{OA}_1 \wedge \vec{F}_1 - \vec{OA}_2 \wedge \vec{F}_1$ (car $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$)

$= \vec{OA}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{A}_2 O \wedge \vec{F}_1$

$= (\vec{OA}_1 + \vec{A}_2 O) \wedge \vec{F}_1$

$= \vec{A}_2 A_1 \wedge \vec{F}_1$

$\vec{M}_O = d \times \|\vec{F}_1\| \vec{e}_y$ (indépend de O)



donc le moment résultant d'un couple de forces \vec{F}_1, \vec{F}_2 tq $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$

Le couple tend à faire tourner le volant autour de O .

c) **Liaison pivot** : Mécanisme ne laissant à un solide qu'un seul degré de liberté en rotation autour d'un axe Δ .

On n'a donc pas de translation suivant Δ .

Liaison pivot idéale : $M_{\Delta}(\text{liaison}) = 0$. On néglige les frottements (en utilisant des roulements à bille ou à aiguille).

des forces de contact entre le rotor et l'emboîtement du stator sont \perp aux surfaces de contact en l'absence de frottements

$\Delta = (Oz)$ axe de rotation la droite (D) , support de \vec{R}_N , coupe Δ .

On a $m \vec{q}$: $M_{\Delta}(\vec{R}_N) = 0$ (p3).

$\Rightarrow M_{\Delta}(\text{liaison}) = 0$
toutes les actions de contact

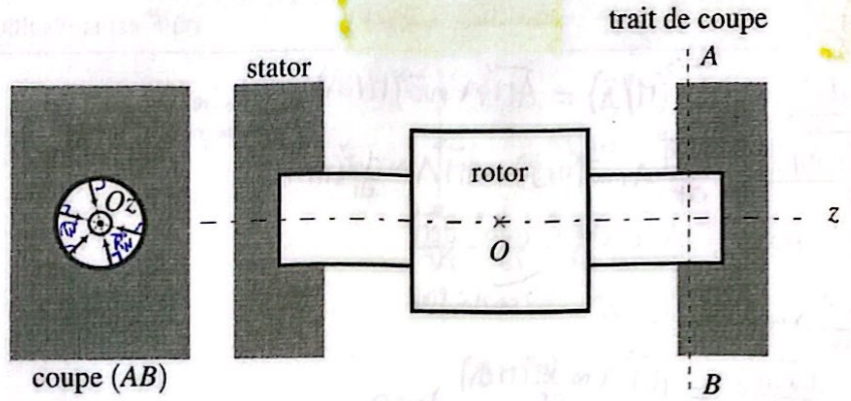


Figure 19.7 - Schéma de principe d'une liaison pivot.

II Moment cinétique

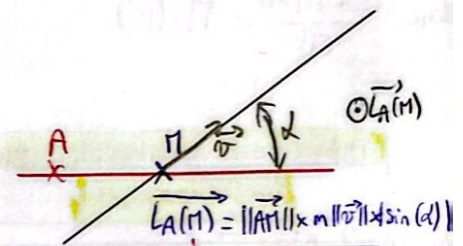
pareil que avant avec $\vec{F} \leftrightarrow m\vec{v}$

1.) Définition

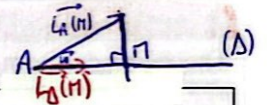
a) pour un point matériel

Moment cinétique au point A du point matériel M(m) de vitesse

$\vec{v}(M/R) : \vec{L}_A(M/R) = \vec{AM} \wedge \vec{p}(M/R) = \vec{AM} \wedge m\vec{v}(M/R)$
 qte de mv



Moment cinétique par rapport à l'axe Δ (passant par A, de vecteur unitaire \vec{u}) : $L_{\Delta}(M/R) = \vec{L}_A(M) \cdot \vec{u}$ $kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}$



Propriété : L_{Δ} a même valeur en tout point de l'axe Δ .

Propriétés : Si D (droite support de \vec{v} , passant par M), passe par A, alors $\vec{L}_A = \vec{0}$.
 Si D (droite support de \vec{v} passant par M), coupe Δ (passant par A, de vecteur unitaire \vec{u})
 ou si $(D) // (\Delta)$, c'est-à-dire si (D) et (Δ) sont coplanaires, alors $L_{\Delta} = 0$.

b) pour un système de points matériels $S = \{M_i (m_i)\}$:

$$\vec{L}_A(Syst/R) = \sum_i \vec{L}_A(M_i/R) = \sum_i \vec{AM}_i \wedge m_i \vec{v}(M_i/R)$$

2.) Théorème du moment cinétique

a) pour un point matériel M(m)

Théorème du moment cinétique en un point fixe A, dans un référentiel R galiléen

$$\frac{d\vec{L}_A(M/R)}{dt} = \vec{M}_A(\vec{F})$$

où \vec{F} est la résultante des forces appliquées

démo: $\vec{L}_A(M/R) = \vec{AM} \wedge m\vec{v}(M/R)$ on dérive comme un produit

$$\frac{d\vec{L}_A(M/R)}{dt} = \frac{d\vec{AM}}{dt} \wedge m\vec{v}(M/R) + \vec{AM} \wedge m \frac{d\vec{v}(M/R)}{dt}$$

$$\vec{AM} = \vec{AO} + \vec{OM} \text{ donc } \frac{d\vec{AM}}{dt} = \frac{d\vec{AO}}{dt} + \frac{d\vec{OM}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{AM}}{dt} \wedge m\vec{v} = \vec{v} \wedge m\vec{v} = \vec{0} \quad \text{car } A, O \text{ fixe}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}_A(M/R)}{dt} = \vec{AM} \wedge m \frac{d\vec{v}(M/R)}{dt}$$

$$= \vec{AM} \wedge \vec{F} \quad \text{LFD.}$$

où \vec{F} = résultante des forces.

$$\text{donc } \frac{d\vec{L}_A(M/R)}{dt} = \vec{M}_A(\vec{F})$$

Théorème du moment cinétique par rapport à un axe fixe Δ, dans un référentiel R galiléen

$$\frac{dL_\Delta(M/R)}{dt} = M_\Delta(\vec{F})$$

où \vec{F} est la résultante des forces appliquées

(d) = (A, \vec{u}), A fixe, \vec{u} cst.

$$\frac{d\vec{L}_A(M) \cdot \vec{u}}{dt} = \vec{M}_A(\vec{F}) \cdot \vec{u} \Rightarrow \frac{d(L_A(M) \cdot \vec{u})}{dt} = M_\Delta(\vec{F}) \Rightarrow \frac{dL_\Delta(M)}{dt} = M_\Delta(\vec{F})$$

b) pour un système de points matériels S = {M_i (m_i)}

Théorème du moment cinétique en A point fixe, dans un référentiel R galiléen

$$\frac{d\vec{L}_A(S/R)}{dt} = \vec{M}_{A,ext}$$

(moment résultant des forces extérieures au système au point A)

$$\vec{L}_A(S/R) = \sum_i \vec{L}_A(M_i/R)$$

$$\frac{d\vec{L}_A(S/R)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_i \vec{L}_A(M_i/R) \right) = \sum_i \frac{d}{dt} \left(\vec{L}_A(M_i/R) \right)$$

TIC à M_i ds un Syst en A FIXE :

$$\frac{d\vec{L}_A(M_i)}{dt} = \vec{M}_{BA}(\vec{f}_i) \text{ où } \vec{f}_i = \vec{f}_{int} + \vec{f}_{ext}$$

$$\frac{d\vec{L}_A(S/R)}{dt} = \sum_i \vec{M}_{BA}(\vec{f}_{int}) + \sum_i \vec{M}_{BA}(\vec{f}_{ext})$$

= M_{A,int} = 0 = M_{A,ext}

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}_A(S/R)}{dt} = \vec{M}_{A,ext}$$

Théorème du moment cinétique par rapport à Δ axe fixe, dans un référentiel R galiléen

$$\frac{dL_\Delta(Syst/R)}{dt} = M_{\Delta,ext}$$

(moment résultant des forces extérieures au système par rapport à l'axe)

c) Application au pendule simple

Syst: $\{M(m)\}$ $OM = l$
 ref: tenseur gal
 forces: $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{e}_z$
 \vec{T} : tension du fil.

TIC à M ds Sigal en O fixe:

$$\frac{d\vec{L}_O(M/R)}{dt} = \mathcal{M}_O(\vec{P}) + \mathcal{M}_O(\vec{T})$$

$$\mathcal{M}_O(\vec{T}) = \vec{OM} \wedge \vec{T} = \vec{0} \text{ car colinéaires (sin=0)}$$

$$\mathcal{M}_O(\vec{P}) = \vec{OM} \wedge \vec{P} = \{mg \sin(\theta) (-\vec{e}_z)\}$$

$$\vec{L}_O(M/R) = \vec{OM} \wedge m\vec{v}(M/R)$$

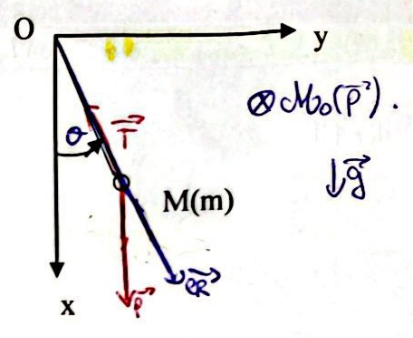
Mvt circulaire \rightarrow coord. cylindriques
 $\vec{OM} = l\vec{e}_r$ et $\vec{v} = l\dot{\theta}\vec{e}_\theta$

donc $\vec{L}_O(M/R) = l\vec{e}_r \wedge ml\dot{\theta}\vec{e}_\theta$
 $= ml^2\dot{\theta}\vec{e}_z$

$$\frac{d\vec{L}_O(M/R)}{dt} = ml^2\ddot{\theta}\vec{e}_z$$

TIC: $ml^2\ddot{\theta}\vec{e}_z = -mgl\sin\theta\vec{e}_z$

donc $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$
 pour de petites oscillations, $\sin\theta \approx \theta$
 on a $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$ où $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$
 oscillateur harmonique. $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$



3.) Solide en rotation autour d'un axe fixe $\Delta = (Oz)$

a) Moment cinétique scalaire d'un solide

$L_{\Delta}(S) = \sum_i L_{\Delta}(M_i) = J_{\Delta} \omega$ où $J_{\Delta} = \sum_i m_i r_i^2$ est le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Δ

$\vec{OM}_i = \vec{OH}_i + \vec{H}_i M_i$

$\vec{OM}_i = z_i \vec{e}_z + r_i \vec{e}_r$

O fixe, \vec{e}_z et \vec{e}_r sont constants.

$\vec{v}_i = \frac{d\vec{OM}_i}{dt} = r_i \frac{d\vec{e}_r}{dt}$

donc $\vec{v}_i = r_i \dot{\theta} \vec{e}_\theta$

Vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta} = \text{cte}$

donc $\vec{v}_i = R \omega \vec{e}_\theta$

$L_0(M_i/R) = \vec{OM}_i \wedge m_i \vec{v}_i$

$= (z_i \vec{e}_z + r_i \vec{e}_r) \wedge m_i r_i \omega \vec{e}_\theta$

$= m_i r_i \omega (z_i \vec{e}_z \wedge \vec{e}_\theta + r_i \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta)$

$(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ direct.
pouce index majeur
 $\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta = \vec{e}_z$
 $\vec{e}_z \wedge \vec{e}_\theta = -\vec{e}_r$

donc $L_0(M_i/R) = -m_i r_i z_i \omega \vec{e}_r + m_i r_i^2 \omega \vec{e}_z$

$L_0(S/R) = \sum_i L_0(M_i/R)$

$= \sum_i (-m_i r_i z_i \omega \vec{e}_r + m_i r_i^2 \omega \vec{e}_z)$

$L_0(S/R) = \vec{L}_0(S/R) - \vec{e}_z$

on projette sur (Δ) dirigée par \vec{e}_z
 $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_z = 0$ et $\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1$.

donc $L_0(S/R) = \sum_i m_i r_i^2 \omega$

$= \omega \sum_i m_i r_i^2$

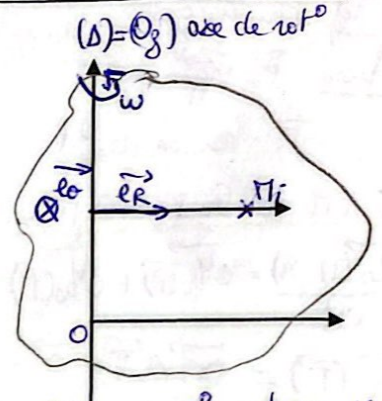
$L_0(S/R) = \omega J_{\Delta}$

où $J_{\Delta} = \sum_i m_i r_i^2$

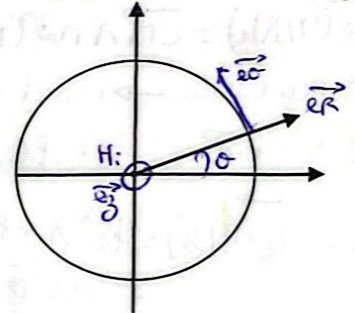
$\text{kg} \cdot \text{m}^2$

→ cst pour un solide

→ Rp2 la répartition des masses autour de l'axe



M_i décrit un cercle centré sur H_i , projeté orth. de M_i sur (Oz)



Exemples :

cylindre vide de rayon R	cylindre plein de rayon R	boule de rayon R	barre de longueur L
mR^2	$\frac{1}{2}mR^2$	$\frac{2}{5}mR^2$	$\frac{1}{12}mL^2$
(Oz)	(Oz)	(Oz)	(Oz)
$2R$	$2R$	$2R$	L

pas à connaître

b) Théorème du moment cinétique pour un solide S en rotation autour d'un axe fixe

Hypothèse : Δ axe fixe, dans un référentiel \mathcal{R} galiléen

$\frac{dL_{\Delta}(S/R)}{dt} = J_{\Delta} \frac{d\omega}{dt} = M_{\Delta, \text{ext}}$

Où $M_{\Delta, \text{ext}}$ est le moment résultant des forces extérieures au solide par rapport à l'axe

$L_{\Delta}(S) = J_{\Delta} \omega$ et $J_{\Delta} = \sum_i m_i r_i^2$ est le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Δ

$L_0(S/R) = J_{\Delta} \omega$ où J_{Δ} est un solide

$\frac{dL_{\Delta}}{dt} = \frac{dJ_{\Delta} \omega}{dt} = J_{\Delta} \frac{d\omega}{dt}$ → à remplacer dans le TTC pour un système

c) Application au pendule pesant

~~*****~~

sys: { solide, masse m, centre d'inertie G, de moment d'inertie J_G }

ref: terrestre galiléen.

soumis à: $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{e}_x$
la résultante des actions, en O

→ liaison pivot parfaite: R_P la surface de contact.

⇒ $M_{\Delta}(liaison) = 0$ où $(\Delta) = (Oz)$ cf p5

TTC appliquée au solide (S) / axe fixe (Δ) de R_{ext} :

$$\vec{M}_O(\vec{P}) = \vec{OG} \wedge \vec{P} = d\vec{e}_r \wedge mg\vec{e}_x = mgd\sin\theta(-\vec{e}_z)$$

$$M_{\Delta}(\vec{P}) = M_{\Delta}(\vec{P}) \cdot \vec{e}_z = -mgd\sin\theta.$$

$$L_{\Delta}(S/R) = J_G \omega \quad \text{où } \omega = \dot{\theta} : \text{vitesse angulaire}$$

TTC ⇒ $\frac{dL_{\Delta}(S/R)}{dt} = \sum M_{\Delta}(\text{ext.})$

$$\Rightarrow J_G \frac{d\omega}{dt} = -mgd\sin\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_G} \sin\theta = 0} \quad (1)$$

petites oscillations : $\sin\theta \approx \theta$.

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0 \quad \text{où } \omega = \sqrt{\frac{mgd}{J_G}} \text{ pulsation propre.}$$

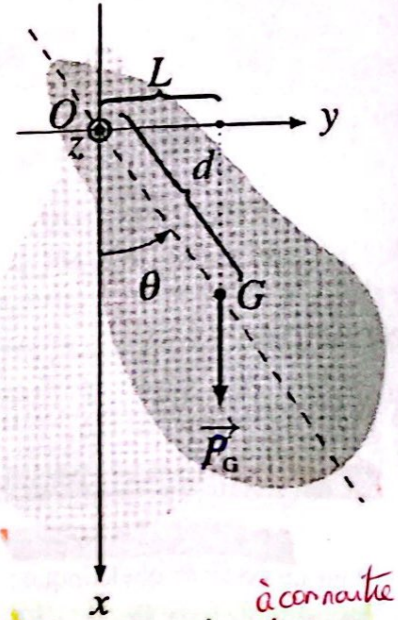
période propre: $T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$

$$= \frac{2\pi J_G}{\sqrt{mgd}} \quad \leftarrow \text{indép des CI}$$

↳ isochronisme.

grandes oscillations : fig 19.11

$\theta = \pi$: correspond à une position d'équilibre stable



Rq: Intégrale première du mouvement: à connaître

def: quantité qui se conserve au cours du temps et fait intervenir les cond initiales de la posit° et de la vitesse.
(en général : conservation de l'Em)

$$(1) \times \dot{\theta} : J_G \dot{\theta} \ddot{\theta} = -mgd \dot{\theta} \sin\theta$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} J_G \dot{\theta}^2 = mgd \cos\theta + \text{cte}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} J_G \dot{\theta}^2 - mgd \cos\theta = \text{cte}$$

$$E_n = E_c + E_{pp} = \text{cte}$$

\vec{P} est la seule force qui travaille, donc $E_n = \text{cte}$

$$E_{pp} = -mgx_G + \text{cte}_2 = -mgd \cos\theta \quad (x_G = \theta\pi)$$

par identification, $E_c = \frac{1}{2} J_G \dot{\theta}^2$

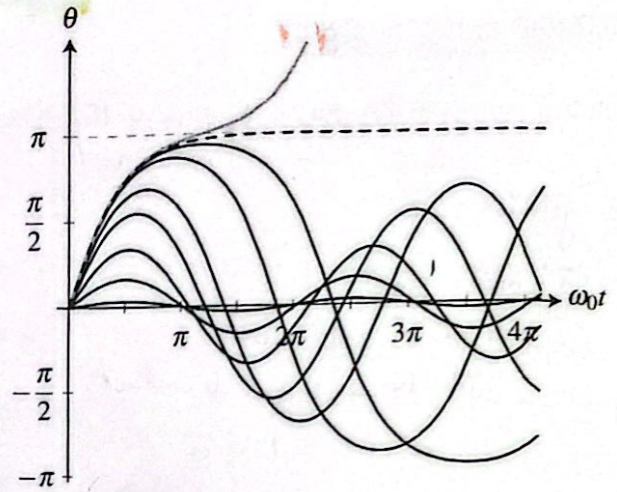


Figure 19.11 - Évolution temporelle de l'angle θ : en trait continu noir, les mouvements sont pendulaires ; en trait continu gris, il est révolatif. Les pointillés correspondent à la transition entre ces deux régimes.

III Approche énergétique des solides

1.) Théorèmes généraux

Pour un système quelconque :

Théorème de l'énergie cinétique dans \mathcal{R} galiléen

$$E_c(t_2) - E_c(t_1) = W_{int} + W_{ext}$$

Théorème de la puissance cinétique dans \mathcal{R} galiléen

$$\frac{dE_c}{dt} = P_{int} + P_{ext}$$

Théorème de l'énergie mécanique dans \mathcal{R} galiléen

$$E_m(t_2) - E_m(t_1) = W_{int}(fnc) + W_{ext}(fnc) \quad (fnc \text{ forces non conservatives})$$

Théorème de la puissance mécanique dans \mathcal{R} galiléen

$$\frac{dE_m}{dt} = P_{int}(fnc) + P_{ext}(fnc)$$

Pour un solide : $P_{int} = 0$ et $W_{int} = 0$

$P_{int} \text{ forces non conservatives} = 0$ et $W_{int} \text{ forces non conservatives} = 0$

2.) Energies

a) Energie cinétique

Pour un système de points

$$E_c = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Pour un solide en translation

$$E_c = \frac{1}{2} m v_G^2$$

$v_i, \omega_i = v_G + \omega \wedge r_i$

$E_c = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \omega^T \sum_i m_i r_i^2 \omega$

Pour un solide en rotation autour d'un axe fixe

$$E_c = \frac{1}{2} J_A \omega^2$$

ps: $\omega_i = R_i \omega$

$E_c = \frac{1}{2} \sum m_i \omega_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i R_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum m_i R_i^2 = \frac{1}{2} \omega^2 J_A$

b) Energie potentielle de pesanteur

$$E_{pp} = mgz_G + cte$$

Pour Π_i : $E_{pp_i} = m_i g z_i + cste$

$E_{pp} = \sum_i m_i g z_i + cste$

$E_{pp} = g \sum_i m_i z_i + cste$

Centre d'inertie: $\vec{OG} = \frac{\sum m_i \vec{O\Pi_i}}{\sum m_i}$

On projette $\textcircled{1}$ sur GA , $\sum m_i r_i = m \Rightarrow m g_A = \sum m_i g_i$

donc $E_{pp} = g m z_A + cste$

3.) Puissance des actions sur un solide

a) Solide en translation

$$P_{ext} = \vec{F}_{ext} \cdot \vec{v}_G$$

$$P_{ext} = \sum_i \vec{F}_{i,ext} \cdot \vec{v}_i = \sum_i \vec{F}_{i,ext} \cdot \vec{v}_A = \vec{v}_A \cdot \sum_i \vec{F}_{i,ext} = \vec{v}_A \cdot \vec{F}_{ext}$$

donc $P_{ext} = \vec{v}_A \cdot \vec{F}_{ext}$

b) Solide en rotation autour d'un axe fixe

Théorème de la puissance cinétique : dans R galiléen, $\frac{dE_c}{dt} = P_{ext}$ où $P_{ext} = M_{\Delta ext} \cdot \omega$

TTTC / D fixe: $\frac{dL_A(S/S)}{dt} = dL_{\Delta ext}$ $\times \omega$: $\int \omega d\omega = \omega M_{\Delta ext}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J_A \omega^2 \right) = dL_{\Delta ext} \cdot \omega$$

donc $E_c = \frac{1}{2} J_A \omega^2$ et $P_{ext} = M_{\Delta ext} \cdot \omega$

IV Script python : Pendule pesant. Non isochronisme des oscillations

1.) Principe

Pour l'équation différentielle du pendule pesant en l'absence de frottements :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$$

donc $\frac{\ddot{\theta}_{k+1} - \ddot{\theta}_k}{h} = -\omega_0^2 \sin\theta$ donc $\ddot{\theta}_{k+1} = \ddot{\theta}_k - h \omega_0^2 \sin\theta$

si $\dot{\theta}_k = \frac{\theta_{k+1} - \theta_k}{h}$ donc $\theta_{k+1} = h \dot{\theta}_k + \theta_k$

$$\theta_{k+1} = \theta_k + h \dot{\theta}_k$$

2.) Mise en oeuvre

MCS étude du pendule pesant : non isochronisme des oscillations
résolution par la méthode d'Euler

```
#importation des bibliothèques
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
#définition de la fonction pendule pesant
#on veut résoudre l'équation différentielle du pendule pesant en l'absence de frottements
#t varie entre a et b
#x=theta et v=x'=theta'
#w0=sqrt(mgd/J)=1rad/s=omega
```

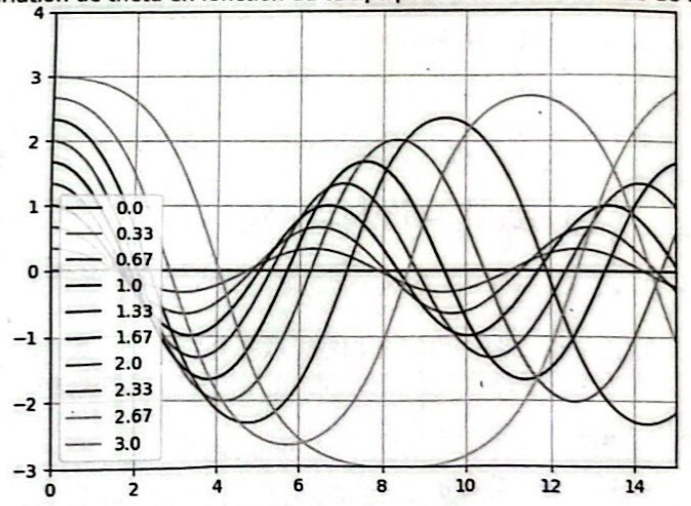
```
def pendulepesant(a,b,x0,v0,omega,n):
```

```
    t = a
    x = x0
    v = v0
    h = (b-a)/n
    les_x = [x]
    les_v = [v]
    les_t = [t]
    for k in range(n):
        t = t + h
        x = x + h*v
        v = v + h*(-omega**2*np.sin(x))
        les_t.append(t)
        les_x.append(x)
        les_v.append(v)
```

mise en
valeur
spécification

```
    return(les_t,les_x,les_v)
```

Variation de theta en fonction du temps pour différentes valeurs de theta0



#tracé des courbes :

#tracer les courbes theta(t) superposées pour 10 valeurs de v0 comprises 0 et 3 rad/s

```

v0 ≠
n = 10 000
les_v0 = np.linspace(0, 3, 10)
for k in range(10):
    les_t, les_x, les_v = pendule_pesant(0, 15, 0, les_v0[k], 1, n)
    plt.plot(les_t, les_x, label = str(round(les_v0[k]))

```

```

plt.axis([0, 15, -3, 10])
plt.legend()
plt.grid()
plt.title("Variation de theta en fonction du temps pour différentes valeurs de (dtheta/dt)0")
plt.figure()

```

#tracer sur un nouveau graphe les courbes theta(t) superposées pour 10 valeurs de x0 comprises 0 et 3 rad

```

n = 10 000
theta0 = np.linspace(0, 3, 10)

```

```

for k in range(10):
    les_t, les_x, les_v = pendule_pesant(0, 15, theta0[k], 0, 1, n)
    plt.plot(les_t, les_x, label = str(round(theta0[k], 2))

```

étiquette / string / anodine à 2 chiffres après la virgule
du graphe

```

plt.axis([0, 15, -3, 4])
plt.legend()
plt.grid()
plt.title("Variation de theta en fonction du temps pour différentes valeurs de theta0")
plt.show()

```

Conclusion : Tabouret d'inertie

systr: cobaye + partie tournante du siège l.

ref: terrestre galiléen

soumis à: son poids P
la résultante des actions de liaisons.

hyp: liaison pivot parfaite → M(liaison) = 0

où (Δ) = (Oz) axe fixe = axe de rotation de la partie tournante

TFC pour un syst en rotation autour d'un axe fixe (Δ) de Rgal

$$\frac{dL_{\Delta}(S/R)}{dt} = M_{\Delta}$$

$$M_{\Delta}(P) = \vec{OG} \wedge \vec{OP} \text{ avec } O \in (\Delta)$$

$$M_{\Delta}(P) = \frac{(\vec{OG} \cdot \vec{P})}{\perp P} \cdot \frac{\vec{OG}}{\parallel P} = 0$$

$$TFC \Rightarrow \frac{dL_{\Delta}(S/R)}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow L_{\Delta} = \text{cste}$$

cobaye bras écartés ⇒ mom. d'inertie J_E / J_S

$$\Rightarrow J_E > J_S$$

$$\text{Conservat}^{\circ} \text{ de la } J\omega = J_S \omega_S \Rightarrow \omega_S = \frac{J_E}{J_S} \omega_E > \omega_E$$

Les patineuses peuvent passer de 1 tr/s à 4 tr/s.

