Mécanique MC5 Loi du moment cinétique.
Mouvement d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

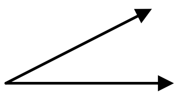
<u>Produit scalaire</u> w= $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos\alpha$

$\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ $\vec{u}.\vec{v} = 0$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont perpendiculaires.

<u>Produit vectoriel</u> $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ tel que :

$\vec{w}$ est perpendiculaire au plan formé par $\vec{u}, \vec{v}$ $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est un trièdre direct.

$\|\vec{w}\| = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot |\sin\alpha|$

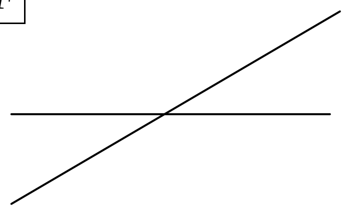


$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$ $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

I Moment d'une force

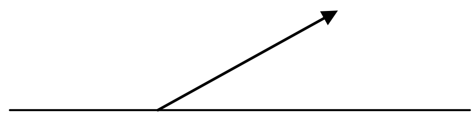
1.) Point matériel

a) Moment au point A d'une force $\vec{F}$ appliquée au point M : $\boxed{\overrightarrow{M}_A(\vec{F}) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}}$



b) Moment d'une force $\vec{F}$ appliquée au point M, par rapport à un axe Δ :

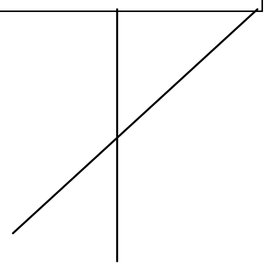
Définition :	Soit un axe Δ passant par A, de vecteur unitaire $\vec{u}$.	$M_\Delta(\vec{F}) = \vec{M}_A.\vec{u} = \parallel \vec{M}_A \parallel .\cos(\vec{u},\vec{M}_A)$
Propriétés :	M_Δ a même valeur en tout point de l'axe Δ.	$\overrightarrow{M}_A \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \overrightarrow{M}_A$

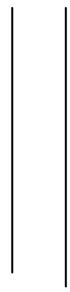


<u>Propriétés :</u> Si (D) et (Δ) sont coplanaires, alors $M_\Delta = 0$

1) Si D (droite support de $\vec{F}$, passant par M), coupe Δ (passant par A, de vecteur unitaire $\vec{u}$) en un point I , alors $M_\Delta = 0$.

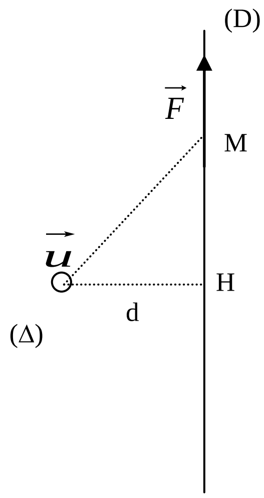
2) Si (D) // (Δ), alors $M_\Delta = 0$





<u>c) Application</u>

<u>Propriété</u> : $M_\Delta = \pm$ d.F où d est le bras de levier (distance à l'axe).



Ces résultats s'appliquent à une force quelconque en la décomposant en une force coplanaire et une force non coplanaire à Δ : $\vec{F} = \vec{F}_{//} + \vec{F}_{\perp}$. On a alors $M_\Delta = \pm$ d. $F_{\perp}$.

2.) Système de points matériels S = {M_i (m_i)}

a) Moments intérieurs et extérieurs

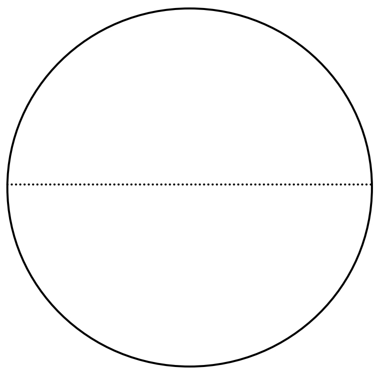
Moment résultant des forces intérieures au système au point A : $\vec{M}_{A,int} = \sum_i \vec{M}_A(\vec{f}_{i,int}) = \vec{0}$

Moment résultant des forces extérieures au système au point A : $\vec{M}_{A,ext} = \sum_i \vec{M}_A(\vec{f}_{i,ext})$

b) Notion de couple

Couple : Action menée sur un système, telle que la force résultante soit nulle;

Un couple ne déplace pas le centre d'inertie d'un système, mais tend à le faire tourner.



c) Liaison pivot : Mécanisme ne laissant à un solide qu'un seul degré de liberté en rotation autour d'un axe Δ.
On n'a donc pas de translation suivant Δ.
Liaison pivot idéale : M_Δ(liaison) = 0. On néglige les frottements (en utilisant des roulements à bille ou à aiguille).

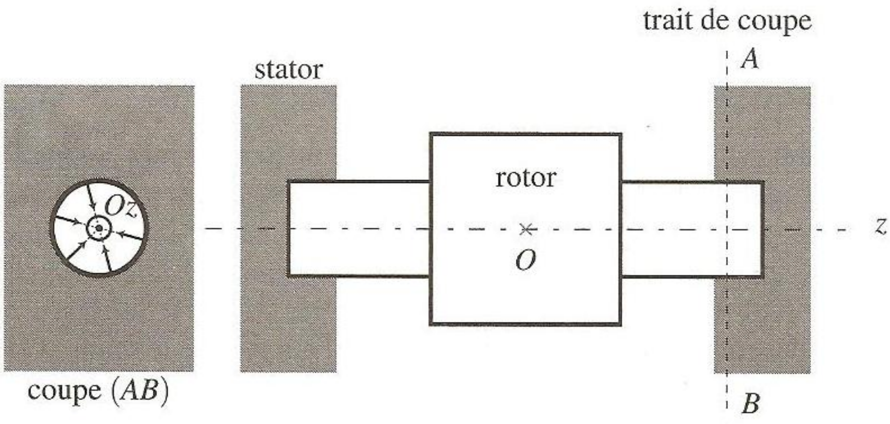


Figure 19.7 – Schéma de principe d'une liaison pivot.

II Moment cinétique

1.) Définition

a) pour un point matériel

Moment cinétique au point A du point matériel M(m) de vitesse $\vec{v}(M \;\; /\mathfrak{R})$

$\vec{L}_A(M/\mathfrak{R}) = \overrightarrow{AM} \wedge m\vec{v}(M/\mathfrak{R})$

Moment cinétique par rapport à l'axe Δ (passant par A, de vecteur unitaire $\vec{u}$) : $L_\Delta(M/\mathfrak{R}) = \vec{L}_A(M).\vec{u}$

Propriété : L_Δ a même valeur en tout point de l'axe Δ.

Propriétés : Si D (droite support de $\vec{v}$, passant par M), passe par A, alors $\vec{L}_A = \vec{0}$.

Si D (droite support de $\vec{v}$ passant par M), coupe Δ (passant par A, de vecteur unitaire $\vec{u}$) ou si (D) // (Δ), c'est-à-dire si (D) et (Δ) sont coplanaires, alors $L_\Delta = 0$.

b) pour un système de points matériels S = {M_i (m_i)}:

$$\vec{L}_A(Syst/\mathfrak{R}) = \sum_i \vec{L}_A\,(M_i/\mathfrak{R}) = \sum_i \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i\vec{v}(M_i/\mathfrak{R})$$

2.) Théorème du moment cinétique

a) pour un point matériel M(m)

Théorème du moment cinétique en un point fixe A, dans un référentiel $\Re$ galiléen

$\frac{d\vec{L}_A(M/\Re)}{dt} = \vec{M}_A(\vec{F})$ où $\vec{F}$ est la résultante des forces appliquées

Théorème du moment cinétique par rapport à un axe fixe Δ, dans un référentiel $\Re$ galiléen

$\frac{dL_\Delta(M/\Re)}{dt} = M_\Delta(\vec{F})$ où $\vec{F}$ est la résultante des forces appliquées

b) pour un système de points matériels S = {M_i (m_i)}:

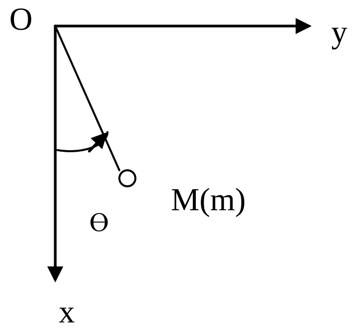
Théorème du moment cinétique en A point fixe, dans un référentiel $\Re$ galiléen

$\frac{d\vec{L}_A(Syst/\Re)}{dt} = \vec{M}_{Aext}$ (moment résultant des forces extérieures au système au point A)

Théorème du moment cinétique par rapport à Δ axe fixe, dans un référentiel $\Re$ galiléen

$$\frac{dL_\Delta(Syst/\Re)}{dt} = M_{\Delta,ext}$$ (moment résultant des forces extérieures au système par rapport à l'axe)

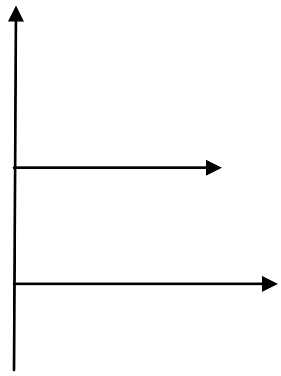
c) Application au pendule simple

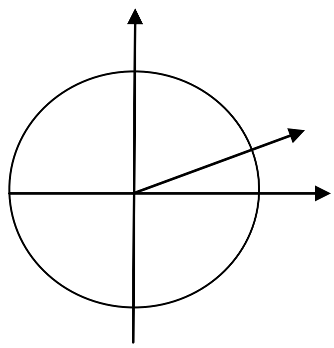


3.) Solide en rotation autour d'un axe fixe Δ = (Oz)

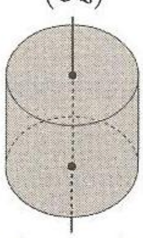
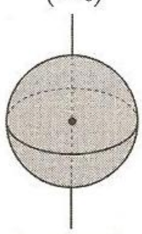
a) Moment cinétique scalaire d'un solide

$L_\Delta(S) = \sum_i L_\Delta(M_i) = J_\Delta \omega$ où $J_\Delta = \sum_i m_i r_i^2$ est le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Δ





Exemples :

cylindre vide de rayon R	cylindre plein de rayon R	boule de rayon R	barre de longueur L
mR^2	$\frac{1}{2}mR^2$	$\frac{2}{5}mR^2$	$\frac{1}{12}mL^2$
(Oz)  $2R$	(Oz)  $2R$	(Oz)  $2R$	(Oz)  L

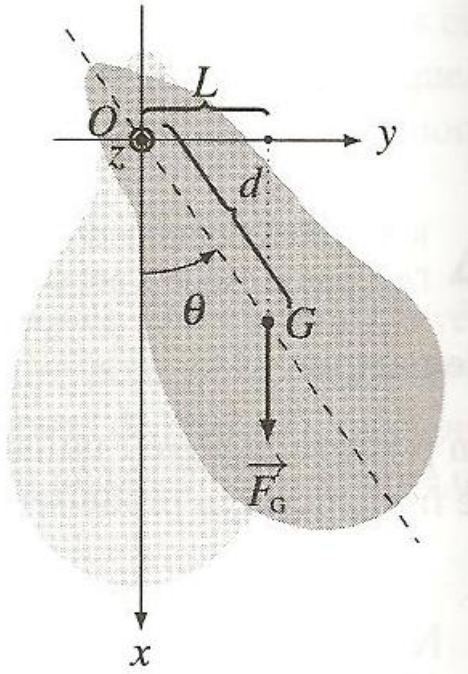
b) Théorème du moment cinétique pour un solide S en rotation autour d'un axe fixe

Hypothèse : Δ axe fixe, dans un référentiel $\Re$ galiléen $\frac{dL_\Delta(S/\Re)}{dt} = J_\Delta \frac{d\omega}{dt} = M_{\Delta ext}$

où $M_{\Delta est}$ est le moment résultant des forces extérieures au solide par rapport à l'axe

$L_\Delta(S) = J_\Delta \omega$ et $J_\Delta = \sum_i m_i r_i^2$ est le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Δ

c) Application au pendule pesant



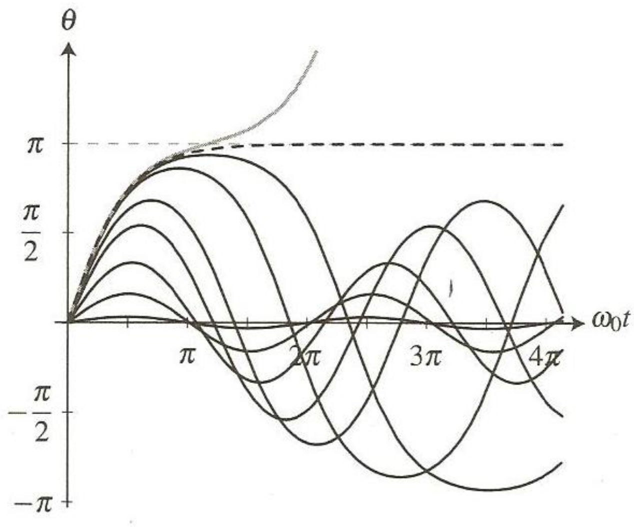


Figure 19.11 – Évolution temporelle de l'angle θ : en trait continu noir, les mouvements sont pendulaires ; en trait continu gris, il est révolutif. Les pointillés correspondent à la transition entre ces deux régimes.

III Approche énergétique des solides

1.) Théorèmes généraux

Pour un système quelconque :

Théorème de l'énergie cinétique dans $\Re$ galiléen $\boxed{E_c(t_2) - E_c(t_1) = W_{\text{int}} + W_{ext}}$

Théorème de la puissance cinétique dans $\Re$ galiléen $\boxed{\dfrac{dE_c}{dt} = P_{\text{int}} + P_{ext}}$

Théorème de l'énergie mécanique dans $\Re$ galiléen

$$\boxed{E_m(t_2) - E_m(t_1) = W_{\text{int}}(fnc) + W_{ext}(fnc) \quad (fnc \text{ forces non conservatives})}$$

Théorème de la puissance mécanique dans $\Re$ galiléen

$$\boxed{\frac{dE_m}{dt} = P_{\text{int}}(fnc) + P_{ext}(fnc)}$$

Pour un solide : $\boxed{P_{\text{int}} = 0 \text{ et } W_{\text{int}} = 0}$ $\boxed{P_{\text{int forces non conservatives}} = 0 \text{ et } W_{\text{int forces non conservatives}} = 0}$

2.) Energies

a) Energie cinétique

Pour un système de points $\boxed{E_c = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2}$

Pour un solide en translation $\boxed{E_c = \frac{1}{2} m v_G^2}$

Pour un solide en rotation autour d'un axe fixe $\boxed{E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2}$

b) Energie potentielle de pesanteur $\boxed{E_{pp} = mgz_G + cte}$

3.) Puissance des actions sur un solide

a) Solide en translation $\boxed{P_{ext} = \vec{F}_{ext}.\vec{v}_G}$

b) Solide en rotation autour d'un axe fixe

Théorème de la puissance cinétique : dans $\Re$ galiléen, $\boxed{\frac{dEc}{dt} = P_{ext}}$ où $P_{ext} = M_{\Delta ext}.\omega$

IV Script python : Pendule pesant. Non isochronisme des oscillations

1.) Principe

Pour l'équation différentielle du pendule pesant en l'absence de frottements :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 sin\theta = 0$$

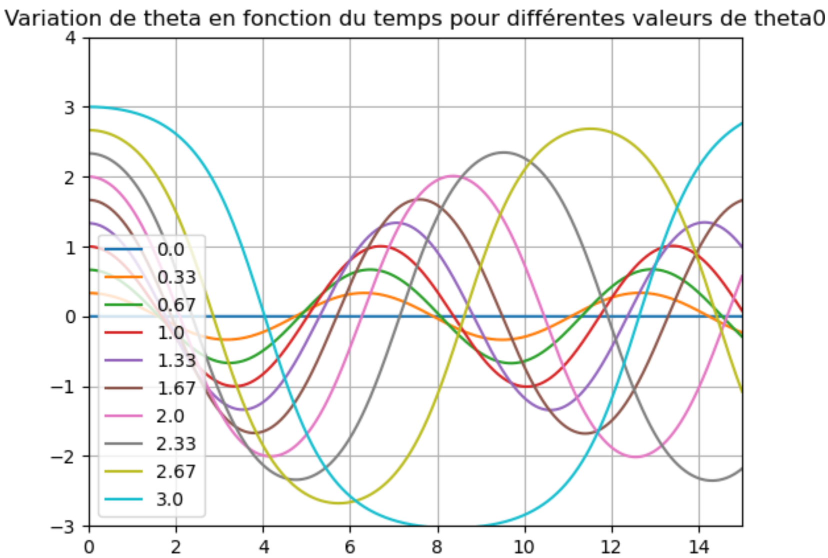
2.) Mise en oeuvre

```
## MC5 étude du pendule pesant : non isochronisme des oscillations
## résolution par la méthode d'Euler

#importation des bibliothèques
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

#définition de la fonction pendule pesant
#on veut résoudre l'équation différentielle du pendule pesant en l'absence de frottements
#t varie entre a et b
#x=theta et v=x'=theta'
#wo=sqrt(mgd/J)=1rad/s=omega

def pendulepesant(a,b,xo,vo,omega,n):
```



```
        return(les_t,les_x,les_v)
#tracé des courbes :
#tracer les courbes theta(t) superposées pour 10 valeurs de vo comprises 0 et 3 rad/s
```

```
plt.axis([0,15,-3,10])
plt.legend()
plt.grid()
plt.title("Variation de theta en fonction du temps pour différentes valeurs de (dtheta/dt)0")
plt.figure()

#tracer sur un nouveau graphe les courbes theta(t) superposées pour 10 valeurs de xo comprises 0 et 3 rad
```

```
plt.axis([0,15,-3,4])
plt.legend()
plt.grid()
plt.title("Variation de theta en fonction du temps pour différentes valeurs de theta0")
plt.show()
```

<u>Conclusion : Tabouret d'inertie</u>