Résumé de cours Mécanique MC5 Loi du moment cinétique. Mouvement d'un solide autour d'un axe fixe

Produit scalaire $w = \vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\alpha$ $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ $\vec{u}.\vec{v} = 0$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont perpendiculaires

Produit vectoriel $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ $\vec{w}$ est perpendiculaire au plan formé par $\vec{u}, \vec{v}$

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est un trièdre direct. $\|\vec{w}\| = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot |\sin\alpha|$

Propriétés : $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$ $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

Moment au point A d'une force $\vec{F}$ appliquée au point M : $\boxed{\overrightarrow{M}_A(\vec{F}) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}}$

Moment d'une force $\vec{F}$ appliquée au point M, par rapport à un axe Δ passant par A, de vecteur unitaire $\vec{u}$:

$$M_\Delta(\vec{F}) = \vec{M}_A.\vec{u} = \| \vec{M}_A \|.\cos(\vec{u}, \vec{M}_A)$$

Propriétés : M_Δ a même valeur en tout point de l'axe Δ. $\overrightarrow{M}_A \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \overrightarrow{M}_A$

Si (D) et (Δ) sont coplanaires, alors $M_\Delta = 0$:

1) Si D (droite support de $\vec{F}$, passant par M), coupe Δ (passant par A, de vecteur unitaire $\vec{u}$) en un point I, alors $M_\Delta = 0$.

2) Si (D) // (Δ), alors $M_\Delta = 0$.

Application : $M_\Delta = \pm$ d.F où d est le bras de levier (distance à l'axe).

Couple : Action menée sur un système, telle que la force résultante soit nulle. Un couple ne déplace pas le centre d'inertie d'un système, mais tend à le faire tourner.

Liaison pivot : Mécanisme ne laissant à un solide qu'un seul degré de liberté en rotation autour d'un axe Δ.
On n'a donc pas de translation suivant Δ.
Liaison pivot idéale : M_Δ(liaison) = 0. On néglige les frottements (en utilisant des roulements à bille ou à aiguille).

Moment cinétique au point A du point matériel M(m) de vitesse : $\vec{v}(M/\Re)$

$\vec{L}_A(M/\Re) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{p}(M/\Re) = \overrightarrow{AM} \wedge m\vec{v}(M/\Re)$

Moment cinétique par rapport à l'axe Δ (passant par A, de vecteur unitaire $\vec{u}$) : $L_\Delta(M/\Re) = \vec{L}_A(M).\vec{u}$

Propriétés : L_Δ a même valeur en tout point de l'axe Δ.

Si D (droite support de $\vec{v}$, passant par M), passe par A, alors $\vec{L}_A = \vec{0}$.

Si D (droite support de $\vec{v}$, passant par M), coupe Δ (passant par A, de vecteur unitaire $\vec{u}$) ou si (D) // (Δ), c'est-à-dire si (D) et (Δ) sont coplanaires, alors $L_\Delta = 0$.

Théorème du moment cinétique pour un point matériel M(m)

- en un point fixe A, dans un référentiel $\Re$ galiléen :

$$\frac{d\vec{L}_A(M/\Re)}{dt} = \vec{M}_A(\vec{F})$$

- par rapport à un axe fixe Δ, dans un référentiel $\Re$ galiléen : $\frac{dL_\Delta(M/\Re)}{dt} = M_\Delta(\vec{F})$

Théorème du moment cinétique pour un système de points matériels S= {M_i (m_i)}

- en un point fixe A, dans un référentiel $\Re$ galiléen :

$$\frac{d\vec{L}_A(S/\Re)}{dt} = \vec{M}_{Aext}$$

- par rapport à Δ axe fixe, dans un référentiel $\Re$ galiléen : $\frac{dL_\Delta(Syst/\Re)}{dt} = M_{\Delta,ext}$

Solide en rotation autour d'un axe fixe Δ = (Oz)

Moment cinétique scalaire d'un solide

$L_\Delta(S) = \sum_i L_\Delta(M_i) = J_\Delta \omega$ où $J_\Delta = \sum_i m_i r_i^2$ est le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Δ

Théorème du moment cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe

dans un référentiel $\Re$ galiléen $$\frac{dL_\Delta(S/\Re)}{dt} = J_\Delta \frac{d\omega}{dt} = M_{\Delta ext}$$

Application au pendule simple et au pendule pesant (à connaître).

Approche énergétique des solides

1.) Théorèmes généraux Pour un système quelconque :

Théorème de l'énergie cinétique dans $\Re$ galiléen $\boxed{E_c(t_2) - E_c(t_1) = W_{\text{int}} + W_{ext}}$

Théorème de la puissance cinétique dans $\Re$ galiléen $\boxed{\frac{dE_c}{dt} = P_{\text{int}} + P_{ext}}$

$P_{int} = 0$ et $W_{int} = 0$

Théorème de l'énergie mécanique dans $\Re$ galiléen

$\boxed{E_m(t_2) - E_m(t_1) = W_{\text{int}}(fnc) + W_{ext}(fnc)}$ (des forces non conservatives)

Théorème de la puissance mécanique dans $\Re$ galiléen

$\boxed{\frac{dE_m}{dt} = P_{\text{int}}(fnc) + P_{ext}(fnc)}$ (des forces non conservatives)

Pour un solide : $P_{int} = 0$ et $W_{int} = 0$ $P_{\text{int forces non conservatives}} = 0$ et $W_{\text{int forces non conservatives}} = 0$

2.) Energies

a) Energie cinétique

Pour un système de points $\boxed{E_c = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2}$

Pour un solide en translation $\boxed{E_c = \frac{1}{2} m v_G^2}$

Pour un solide en rotation autour d'un axe fixe $\boxed{E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2}$

b) Energie potentielle de pesanteur $\boxed{E_{pp} = mgz_G + cte}$

3.) Puissance des actions sur un solide

a) Solide en translation $\boxed{P_{ext} = \vec{F}_{ext} . \vec{v}_G}$

b) Solide en rotation autour d'un axe fixe

Théorème de la puissance cinétique : $\boxed{\frac{dEc}{dt} = P_{ext} \text{ où } P_{ext} = M_{\Delta ext} . \omega}$

Exemple : Tabouret d'inertie (à connaître)